Ap. mil.
43.

Heim, J. P. g. v.

Beiträge zur Ballistik,

in besonderer Beziehung

auf

die Umdrehung der Artillerie-Geschoße.

Von

J. P. G. v. Heim,
Major in der königl. württemb. Artillerie.

Ulm, 1848.
In Commission bei Gebrüder Nübling.

614. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit wurde, wie der Verfasser hiemit gerne kund gibt, ursprünglich in der Absicht unternommen, aus den auf der Grundlage, welche Poisson gegeben, gebildeten Gleichungen der Flugbahn eines rotirenden Geschosses durch einen möglich vollständigen und sicheren Calcül die Gesetze und Bedingungen der als Folge der Rotation thatsächlich hinreichend erwiesenen Ablenkung der Artillerie-Geschosse abzuleiten und nachzuweisen; sie hat ihm jedoch die genügendste Überzeugung verschafft, daß die gewünschte und erwartete Aufklärung des genannten Gegenstandes auf diesem Wege nicht zu gewinnen ist, und daß überhaupt die Theorie des Luftwiderstandes auf ihrem gegenwärtigen Standpunkte zur ursächlichen Erklärung jener Einwirkung der Rotation keineswegs ausreicht.

Wenn aber auch das bei diesem Unternehmen zunächst ins Auge gefaßte Ziel, wie in der Natur der Sache liegt, nicht erreicht worden ist, so hofft der Verfasser dennoch, indem er seine (bereits im Jahre 1845 beendigte) Arbeit mit dem Wunsche, zu recht vielseitiger Durcharbeitung des wichtigen Stoffes dadurch weitere An-

regung zu geben, hiemit zur Oeffentlichkeit bringt, durch Darlegung der Ergebnisse seiner theoretischen Untersuchungen, der Schlußfolgen, aus denen jene Ueberzeugung hervorgegangen ist, und der Ergebnisse der über den Erfolg der Umdrehung concentrisch construirter Geschosse von ihm angestellten practischen Forschungen, zur ferneren Entwickelung des ballistischen Problems, und besonders der Lehre von den Abweichungen der Geschosse, einigen Beitrag zu liefern, und dem einem gründlichen Studium der Artillerie-Wissenschaft ergebenen Theile seiner Waffengenossen einen, solchem Streben förderlichen, Dienst zu erweisen.

Ulm, im April 1848.

Der Verfasser.

Einleitung.

Der bedeutende Einfluß auf die fortschreitende Bewegung der Geschosse, den eine gleichzeitige umdrehende Bewegung derselben nach Beschaffenheit der Lage der Umdrehungsachse gegen die Richtung jener Bewegung und des gegenseitigen Verhältnisses der Geschwindigkeiten beider Bewegungen hervorzubringen im Stande ist, muß als eine Entdeckung der neuern Zeit betrachtet werden. Der Grund, warum dieser Einfluß nicht schon früher, und seit der Erfindung und Einführung der Feuerwaffen gehörig erkannt und gewürdigt worden ist, liegt ohne Zweifel nicht etwa darin, daß die Umdrehung überhaupt eine nur seltene Begleiterinn der Bewegung der Geschosse ist, sondern hauptsächlich in dem Umstande, daß sie an und für sich, und um so mehr ihre Richtung, in den meisten Fällen der Wahrnehmung des Beobachters sich gänzlich entzieht. In so fern jedes Geschoß beim Abfeuern, wenn die Richtung des durch die Ladung ihm mitgetheilten Stoßes nicht durch seinen Schwerpunkt geht, oder wenn es Anschläge im Geschützrohr macht, abgesehen von der auf andere Weise entstehenden Reibung desselben an den Wänden der Seele, eine Umdrehung annehmen kann und muß; ist die Annahme hinreichend begründet, daß die Rotation nicht Ausnahme, sondern vielmehr Regel bei der Bewegung der Geschosse ist, und so weit der Gegenstand sich gegenwärtig übersehen läßt, muß ferner gefolgert werden, daß sie, wo nicht die hauptsächlichste, doch eine der ersten Ursachen der so häufig vorkommenden und so schwer zu vermeidenden Unregelmäßigkeiten der Schüsse ist.

In den ältern Schriften über Gegenstände der Artillerie-Wissenschaft findet man die Rotation nur selten unter den die Abweichungen der Geschosse bewirkenden Ursachen aufgeführt. Robins (1) ist

(1) Neue Grundsätze der Artillerie, 1742. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Euler, 1745. Buch II, Satz VII.

wohl einer der ersten Schriftsteller, welche die Umdrehung der Geschosse als einer solchen Ursache erwähnen. Er will die doppelte Krümmung der Kugelbahn hauptsächlich der durch die drehende Bewegung veränderten Richtung des Luftwiderstandes gegen die Oberfläche des Geschosses zuschreiben, ohne jedoch tiefer in die Sache selbst einzugehen.

Euler (1) widerspricht in seinen Anmerkungen zu den von Robins aufgestellten Sätzen dieser Ansicht, und findet die Hauptursache der Unsicherheit der Schüsse in mangelhafter Ründung der Geschosse; er weiset nach, daß die Wirkung des normalen Luftwiderstandes auf die fortschreitende Bewegung des Geschosses bei einer vollkommen runden um ihren Mittelpunkt sich drehenden Kugel gar nicht, bei unvollkommener Kugelgestalt aber, und wenn die Achse der Drehung nahe durch den Mittelpunkt geht, nicht merklich, durch die Umdrehung verändert werden könne, und behauptet, daß die Ablenkung eines nicht ganz runden Geschosses durch die drehende Bewegung nicht nur nicht vermehrt, sondern sogar vermindert werde, so wie, daß der Widerstand, den das Geschoß von der Reibung der Lufttheilchen an seiner Oberfläche erleidet, so gering sey, daß er füglich außer Acht bleiben könne.

Lombard (2) tritt im Wesentlichen der von Robins geäußerten Meinung bei, gelangt aber, indem er die Erscheinungen zu erklären sucht, zu einem in Bezug auf die Richtung der Abweichung der Erfahrung geradezu widersprechenden Ergebniß.

Hutton (3) bezeichnet die umdrehende Bewegung kugelförmiger Geschosse gleichfalls als eine Ursache der stetig zunehmenden Abweichungen derselben.

(2) Nouveaux principes d'Artillerie &c. traduits par Lombard avec notes, 1783, p. 494... Eine Vergleichung hiermit verdient die Note von Villantroÿs in dem von ihm übersetzten ersten Bande der Nouvelles expériences d'Artillerie von Hutton, 1802, p. 174.

(3) Tracts on mathematical &c. subjects, 1812. Übersetzt von Terquem im zweiten Band der Nouvelles expériences &c. 1826, p. 179.

Gassendi (4), welcher die Ansichten der genannten Schriftsteller anführt, ist nicht geneigt zu glauben, daß die Rotation der Geschoße eine erhebliche Ablenkung derselben zu bewirken vermöge.

Paixhans (5) dagegen nennt, indem er von der Eigenschaft der Spiegel, zur Verminderung der Umdrehung der Geschoße beizutragen, spricht, diese Bewegung eine große Ursache der Abweichungen.

Im Leitfaden für die k. preußischen Brigadeschulen (6) wird der Rotation der Geschoße als Ursache der Seitenabweichungen ebenfalls besondere Erwähnung gethan.

Erst in den letzten Jahren scheint durch die, vielleicht zufällig, gemachte Beobachtung, daß durch methodisches Laden, mit Rücksichtnahme auf die Lage des Schwerpunkts im Geschützrohre, an Regelmäßigkeit der Schüsse gewonnen wird, die Umdrehung der Geschoße ein Gegenstand besonderer Aufmerksamkeit geworden zu seyn. Versuche, mit eigens für diesen Zweck construirten Geschoßen von größerer Excentricität und äußerer Kugelgestalt aus Wurfgeschützen angestellt, gaben die Bestätigung, daß, wenn der Schwerpunkt im Geschützrohre rechts oder links vom Mittelpunkte oder von der durch die Seelenachse gehenden Verticalebene liegt, das Geschoß beim Abfeuern jedes Mal nach derselben Seite dieser Ebene abweicht, auf der der Schwerpunkt sich befindet, und daß ebenso, wenn der Schwerpunkt beim Laden in die genannte Ebene selbst gelegt wird, je nachdem derselbe über oder unter dem Mittelpunkte sich befindet, bei kleinern Erhöhungen der Seelenachse das Geschoß regelmäßig weiter oder kürzer geht, als wenn er gerade vor oder hinter den Mittelpunkt zu liegen kommt. Weil nun, wenn der

(4) Aide-Mémoire à l'usage des officiers d'Artillerie, 1819, Tome II. p. 807.

(5) Nouvelle force maritime &c. 1822, Chap. 22.

(6) Leitfaden zum Unterricht in der Artillerie für die kön. preußischen Brigadeschulen, 1829, Seite 330..

Schwerpunkt außerhalb der durch den Mittelpunkt gehenden Richtungslinie des das Geschoß forttreibenden Stoßes liegt, nach den Grundlehren der Mechanik dieses dadurch eine Drehung um eine Achse, welche auf der durch jene Richtungslinie und den Schwerpunkt gehenden Ebene senkrecht steht, von solcher Richtung annehmen muß, daß der vordere Theil des Geschoßes nach der Seite des Schwerpunkts, z. B. von der linken nach der rechten Seite, wenn dieser rechts, oder von unten nach oben, wenn er oben liegt, sich bewegt, so war es als feststehende Thatsache zu betrachten, daß Geschoße, deren Schwerpunkte nicht mit den Mittelpunkten zusammenfallen, wenn mit ihrer fortschreitenden Bewegung zugleich eine drehende um eine auf der Richtung jener Bewegung senkrechte Achse verbunden ist, von dieser Richtung immer nach derjenigen Seite abgelenkt werden, nach welcher deren vorderer Theil bei der Drehung sich bewegt. Die Richtung, in der die Abweichung der Geschoße erfolgte, zeigte sich dabei ganz entschieden an die Richtung der Umdrehung gebunden, und bei den Ablenkungen nach der rechten oder linken Seite gab sich zugleich eine, auf eine stetig wirkende Kraft hinweisende, doppelte Krümmung der Flugbahn unzweifelhaft und mit Deutlichkeit zu erkennen, so daß diese Wahrnehmungen die Vorstellung, als könnte die Ursache der beobachteten Erscheinungen in anderen, von der Rotation unabhängigen oder zufälligen, Umständen, z. B. mangelhafter Rundung, zu suchen seyn, gar nicht Raum gewinnen ließen. Auch fielen die Abweichungen so bedeutend aus, daß dadurch das durch die Treffähigkeit bedingte Erforderniß, beim Gebrauche der zu den Versuchen verwendeten Art von Geschoßen auf die Lage des Schwerpunkts im Geschützrohre Bedacht zu nehmen, gleich von Anfange an recht augenfällig hervortrat.

Das Interesse, den wissenschaftlichen Erklärungsgrund der thatsächlich erwiesenen Erscheinungen aufzufinden, mußte in um so höherem Grade rege werden, als diese Angelegenheit als ein

Gegenstand von Wichtigkeit auch für die ausübende Artillerie sich darstellt. Bei oberflächlicher Betrachtung bietet sich zwar zunächst die Ansicht dar, daß der Luftwiderstand auf die beiden ungleich großen Theile, in welche die Oberfläche des Geschosses durch die auf der geraden Linie, welche den Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt verbindet, im Schwerpunkt senkrecht stehende Ebene zerfällt, bei der Umdrehung des Geschosses um eine in jener Ebene liegende Achse ebenfalls ungleiche Einwirkung haben müsse, und daß hieraus eine stetige Ablenkung des Geschosses aus der Richtung seiner fortschreitenden Bewegung entstehen könne. Allein bei näherer Prüfung zeigt sich bald, daß dieser Umstand zur Erklärung der Sache nicht genügt. Überhaupt reicht hier ein flüchtiger Überblick der Sachverhältnisse nicht aus, sondern die Frage, ob der der Umdrehung eines excentrischen Geschosses entgegentretende Luftwiderstand wirklich vermögend sey, die in Rede stehenden Abweichungen hervorzubringen, kann nur auf dem Wege eines strengen, alle dabei in Betracht kommenden Umstände berücksichtigenden, Calculs entschieden werden.

Unter den vielen sehr beträchtlichen Schwierigkeiten, welche der Ausführung einer solchen Rechnung sich entgegenstellen, besteht eine der größten darin, daß die Natur des Luftwiderstandes und die Gesetze, nach welchen die Wirkung desselben sich richtet, gegenwärtig noch immer nicht genau genug bekannt sind, um als sichere Grundlage der Untersuchung dienen zu können. Es ist nicht in Abrede zu ziehen, daß, ungeachtet der sehr vielfältigen über diesen Zweig der Naturlehre seit Newton unternommenen theoretischen und praktischen Forschungen, die Wissenschaft bis jetzt statt der von diesem berühmten Physiker aufgestellten Sätze noch nichts viel besseres aufzuweisen hat, obgleich diese Sätze mit den Beobachtungen über die Bewegung der Körper in flüssigen Mitteln keineswegs auf befriedigende Weise übereinstimmen.

die Folgerungen, welche der französische Akademiker Poisson aus seinen Untersuchungen über die Bewegung des Pendels in der widerstehenden Luft (7) abgeleitet hat, finden nur auf sehr langsame Bewegungen der Körper Anwendung, und das von ihm gegebene Verfahren (8), seine Berechnungen wo möglich auch auf die fortschreitende Bewegung der Geschosse auszudehnen, wurde derselbe, ehe dass er wie es scheint für dessen Verwirklichung thätig sein konnte, durch einen für die Wissenschaften allzu frühe erfolgten Tod enthoben.

Um zur Kenntniss der wahren Gesetze des Widerstandes der flüssigen Mittel gegen die in ihnen sich bewegenden festen Körper, oder des Druckes, den irgend eine Flüssigkeit auf einen solchen Körper ausübt, und der richtigen analytischen Ausdrücke für diese Gesetze zu gelangen, wäre bei den hierauf abzielenden Untersuchungen nicht nur die Bewegung des festen Körpers, sondern auch jene der Flüssigkeit selbst, in Betracht zu ziehen, oder müssten alle die Veränderungen, denen der Zustand der in die Wirkungssphäre des Körpers fallenden Theile der Flüssigkeit, sowohl durch den plötzlich wirkenden Stoss auf die ihn zunächst umgebenden Theile, als durch die fortgesetzte Bewegung desselben, unterliegt, durch Rechnung genau bestimmt werden. Nun sind zwar die Differential-Gleichungen für die Bewegung flüssiger Körper nach den Lehrsätzen der Hydrodynamik (durch d'Alembert und Euler) längst entwickelt, und wenn es gelingen sollte, diese Gleichungen vollständig zu integriren, so wie auch die Zustände, in welche die den festen Körper berührenden Theile der Flüssigkeit durch den auf sie wirkenden Stoss versetzt werden, mit Genauigkeit zu ermitteln, so müssten sich für jeden Augenblick der Bewegung Dichtigkeit, Druck und Geschwindigkeit jedes einzelnen Theilchens der Flüssigkeit, und somit ebenfalls der

(7) Mémoire sur les mouvements simultanés du pendule & de l'air environnant in den Mémoires de l'Académie des Sciences, Tome XI.

(8) Recherches sur les mouvements des projectiles, 1839, p. 3.

Gesamtdruck oder der Widerstand, den der Körper erleidet, in aller Schärfe bestimmen lassen, so wie überhaupt so manche der wichtigsten physikalischen Fragen, welche sämtlich mehr oder weniger in das Gebiet der Artillerie-Wissenschaft eingreifen, von solcher Erweiterung der Analysis Aufklärung und Lösung zu erwarten hätte. Allein die vollständige Integration jener Gleichungen, welche zu der Klasse der sogenannten Partialgleichungen gehören, ist gegenwärtig noch immer mehr als Unmöglichkeit zu betrachten, und die ganze Aufgabe überhaupt zu verwickelt, als daß eine vollkommen genügende Auflösung derselben jemals zu hoffen stände.

J.C.Ed. Schmidt (9) hat eine neue Theorie des Luftwiderstandes aufgestellt, welche den Grundlehren der Dynamik mehr entspricht und mit der Erfahrung besser übereinzustimmen scheint, als die von Newton gegebene. Da sie jedoch auf die Gesetze des Gleichgewichts der elastisch flüssigen Körper, statt auf die Gesetze der Bewegung derselben, gegründet ist, so können die aus ihr für diesen Widerstand abgeleiteten Ausdrücke ebenfalls nur als näherungsweise gültig betrachtet werden. Und da diese Ausdrücke, dennoch, wie es in der Natur der Sache liegt, von zusammengesetzterer Form und bei der Rechnung schwieriger zu behandeln sind, als die auf den Voraussetzungen Newtons beruhenden, so läßt sich hieraus ermessen, wie sehr, wenn die Ermittlung der wahren Widerstandsgesetze auch möglich wäre, die Anwendbarkeit und der Nutzen derselben durch die für die Rechnung daraus erwachsenden Schwierigkeiten beeinträchtigt würden.

Poisson, der sich auch um die Artillerie-Wissenschaft durch Bearbeitung so mancher ihr angehöriger Fragen wichtige, sehr anerkennungswerthe, Verdienste erworben hat, scheint sich die Aufgabe gestellt zu haben, die in unvollkommener Kugelgestalt, und in ungleicher Vertheilung der Masse oder im Nichtzusammenfallen des Schwerpunkts mit dem Mittelpunkte, bestehenden Mängel der Geschosse, so wie die die Bewegung derselben verzögernde Reibung der Luft an deren

(9) Theorie des Widerstandes der Luft rc. 1831.

Oberfläche, in so fern diese dreierlei Umstände als die Hauptursachen der Abweichungen der Geschosse betrachtet werden, in Beziehung auf die Stärke des Einflusses, den jeder derselben auf diese Erscheinungen auszuüben vermag, einer gründlichen Untersuchung zu unterwerfen. Ein diesem Zwecke von ihm gewidmetes Werk (8) enthält außer einer Denkschrift über die Bewegung der Geschosse mit Rücksicht auf die Umdrehung der Erde, eine weitere Denkschrift über die Bewegung der Geschosse in der Luft mit Rücksicht auf deren eigene Umdrehung, in welcher letztern nach einander die Einflüsse der Luftreibung, der mangelhaften Kugelgestalt, und der ungleichen Vertheilung der Masse des Geschosses, auf dessen Bewegung abgehandelt sind. Indem die Voraussetzung, daß der normale oder eigentlich sogenannte Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sey, und die in seinem Traité de Mécanique vom Verfasser gegebenen, die umdrehende Bewegung der festen Körper betreffenden, Sätze und analytischen Hülfsmittel bei diesen Arbeiten zum Grunde gelegt und angewendet werden, sind die Differentialgleichungen der fortschreitenden und rotirenden Bewegung allgemein für jede Gestalt des Körpers, so wie die Ausdrücke für die dem normalen und berührenden Luftwiderstande entsprechenden auf den Körper wirkenden beschleunigenden Kräfte, in dem genannten Werke mit eben so viel Gewandtheit als Scharfsinn entwickelt. Weil jedoch die zusammengesetzte Gestalt dieser Gleichungen die Durchführung der Rechnung in ihrer Allgemeinheit nicht gestattet, mußte die weitere Behandlung derselben auf gewisse besondere Fälle beschränkt werden und unter Annahmen geschehen, welche nur angenäherte Resultate gewährten, und die Einwirkung jeder der genannten drei Ursachen für sich, getrennt von jener der übrigen, in Betracht gezogen werden. Was nun die Ergebnisse der von Poisson angestellten Untersuchungen, so weit sie auf die Rotation der Geschosse Beziehung haben, betrifft, so findet derselbe, daß der Widerstand der Luftreibung zwar nach Beschaffenheit der Lage der Umdrehungsachse

eine beständig nach derselben Seite der vertikalen Richtungsebene gerichtete Ablenkung des Geschosses zur Wirkung haben kann, daß aber diese Ablenkung, wie sie die Rechnung gibt, derjenigen, welche die Erfahrung als Folge der Rotation zeigt, der Richtung nach entgegengesetzt und jedenfalls zu unbedeutend ist, als daß die letztere daraus erklärt werden könnte. Die doppelte Bewegung eines rotirenden Geschosses, dessen Schwerpunkt und Mittelpunkt nicht zusammenfallen, wurde von Poisson mit Rücksicht auf den normalen Luftwiderstand zwar ebenfalls aus den für sie abgeleiteten Gleichungen durch Integration zu bestimmen gesucht, die mit ganz besondern Schwierigkeiten verbundene Rechnung jedoch nicht in solcher Allgemeinheit und Strenge ausgeführt, daß eine sichere Entscheidung der Frage, ob in der Wirkung dieses der Rotation entgegentretenden Widerstandes die Möglichkeit und Nothwendigkeit der beobachteten Abweichungen gegeben sey, daraus entnommen werden kann. Daher kann allerdings in Bezug auf diesen für die Artillerie besonders wichtigen Theil der Untersuchung die von Poisson übernommene Aufgabe nicht als gelöst betrachtet werden.

Mit eben diesen, im Gefolge der Rotation auftretenden, Erscheinungen beschäftigt sich nun ihrem Inhalt und Zwecke nach zunächst auch die vorliegende Arbeit.

Bei der Entwickelung der Differential-Gleichungen für die doppelte Bewegung eines rotirenden excentrischen Geschosses mit sphärischer Oberfläche wurde zwar im Allgemeinen dem von Poisson betretenen Wege gefolgt, die Bewegung jedoch auf den Mittelpunkt des Geschosses als Untersuchungspunkt, statt auf den Schwerpunkt, bezogen, und, indem zugleich für den normalen Widerstand eine allgemeinere, auf jedes Widerstandsgesetz passende, Ausdrucksform gewählt wurde, hierdurch der Vortheil erreicht, daß jene Gleichungen nicht nur genau, sondern selbst einfacher als die von Poisson dargestellten sich ergeben. Weil indessen die Integration

der Gleichungen in ihrer allgemeinsten Gestalt nicht ausführbar ist, so mußte dieselbe auf einzelne besondere Hauptfälle beschränkt werden.

Die Schwere des Geschoßes ist zwar eines der bedingenden Elemente der Gestalt der Flugbahn, und muß daher, wenn diese Gestalt bestimmt werden soll, nothwendig in die Rechnung eingehen. Auf die Rotations-Bewegung eines excentrischen Geschoßes hat sie aber, da ihre Richtung durch den Schwerpunkt geht, nur mittelbar in so ferne Einfluß, als sie zur stetigen Veränderung der fortschreitenden Geschwindigkeit des Geschoßes beiträgt. Wenn es sich daher nur um die Entscheidung der Frage handelt, ob überhaupt die Rotation auf die Bahn des Geschoßes wesentlich einzuwirken vermöge, so genügt es, die Bewegung desselben abgesehen von der Schwerkraft zu bestimmen, indem man sicher seyn kann, daß, wenn bei solchem Verfahren kein erheblicher Einfluß der Umdrehung auf die Bahn des Geschoßes aus der Rechnung hervorgeht, derselbe Fall auch bei zugleich genommener Rücksicht auf die Schwerkraft Statt finden würde. Dadurch wird aber die Rechnung in sehr bedeutendem Grade erleichtert, während, wenn diese Kraft nicht unberücksichtigt bleibt, sie nur zu Ausdrücken führt, welche zwar, wie die von Poisson entwickelten, zur numerischen Berechnung der Flugbahn in ganz speciellen Fällen, aber nicht zur Begründung allgemeiner Schlüsse in Bezug auf die vorliegende Frage, sich eignen.

Indem somit dieser Überlegung gemäß die weitere Behandlung der genannten Gleichungen ohne Rücksicht auf die Schwerkraft vorgenommen wurde, ging daraus das unzweifelhafte Ergebniß hervor, daß, wenn auch die Excentricität des Geschoßes und dessen Umdrehungsgeschwindigkeit so beträchtlich sind, als sie nur immer in der Praxis vorkommen können, durch den normalen Widerstand, welchen die Luft der Rotation entgegensetzt, keine durch Beobachtung irgend wahrnehmbare Abweichung entstehen kann.

Für quadratischen Luftwiderstand wurde ferner durch angenäherte

gleichzeitige Integration der Gleichungen der doppelten Bewegung eines excentrischen Geschosses das Gesetz der Abnahme der Umdrehungsgeschwindigkeit und der Ausdruck für den nach Verfluß einer bestimmten Zeit bei der Umdrehung vom Geschosse durchlaufenen Winkel oder für die Zahl der in dieser Zeit vollführten Umläufe, entwickelt.

In den mit Rücksicht auf die Luftreibung construirten Gleichungen der doppelten Bewegung einer Kugel, deren Schwerpunkt und Mittelpunkt zusammenfallen, kann die Schwere des Geschosses für den hier zum Grunde liegenden Zweck um so mehr gleich Null angenommen werden, als die Rotations-Bewegung eines solchen Geschosses von der Schwerkraft gänzlich unabhängig ist. Unter dieser Annahme und der Voraussetzung, daß der normale Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sey, werden diese Gleichungen in geschlossener Form integrirbar; sie liefern jedoch ebenfalls kein Ergebniß, in welchem die Erscheinungen, welche die Erfahrung gibt, ihre Erklärung finden könnten, woraus denn ferner zu entnehmen ist, daß auch excentrische Geschosse nicht durch die Luftreibung, welche die Umdrehung erzeugt, aus ihrer Bahn getrieben werden können.

Diese zunächst nur auf bestimmte Hauptfälle sich beziehenden Folgerungen lassen sich nun weiter durch Betrachtungen verallgemeinern, aus welchen ersichtlich wird, daß, von welcher Beschaffenheit immer der Ausdruck des normalen Luftwiderstandes als Function der Geschwindigkeit seyn mag, und wenn auch die Umdrehungsachse in jedem Augenblicke eine andere ist, die Rotation keinen Einfluß von einiger Erheblichkeit auf die Bahn eines excentrischen Geschosses mit sphärischer Oberfläche haben kann.

Nachdem man auf solche Art zu der Überzeugung gelangt war, daß die in Rede stehenden Abweichungen der eben genannten Art von Geschossen, welche die Umdrehung derselben thatsächlich zur Folge hat, ihren Entstehungsgrund weder im normalen noch im berührenden

Widerstande der Luft haben können, war der Gedanke nahe gelegt, ob nicht die Rotation an sich, unabhängig von der Excentricität, diese Erscheinungen hervorzubringen vermöge, oder ob nicht auch Geschosse, welche keine oder nur sehr geringe Excentricität haben, denselben Einfluß der Rotation zeigen wie excentrische.

Directe Versuche, mit Geschossen angestellt, welche bei der Untersuchung mit einem hierzu verfertigten besondern Apparate nur wenig excentrisch gefunden wurden, bestätigten diese Vermuthung. Die Geschosse waren siebenpfündige Granaten, welche aus dem zehnpfündigen Mörser geworfen und mittelst hölzerner Spiegel so geladen wurden, daß sie durch den excentrisch auf sie wirkenden Stoß der Ladung eine Umdrehung von bekannter Richtung annehmen mußten. Sie wichen nicht weniger regelmäßig und verhältnißmäßig eben so stark als die excentrischen nach derjenigen Seite ab, nach welcher bei der Umdrehung ihr vorderer Theil sich bewegen mußte, so daß die Rotation eben so unzweideutig wie bei den letzteren als Ursache der Abweichung sich aussprach, und da zwischen der Größe der Abweichungen und dem Maße der noch vorhandenen kleinen Excentricitäten der verschiedenen Geschosse durchaus kein erkennbarer Zusammenhang besteht, so zeigen die Versuche offenbar, daß diese Abweichungen, ohne mit der Excentricität in Beziehung zu stehen, ihren Ursprung allein in der den Geschossen im Geschützrohr mitgetheilten Rotations-Bewegung haben, und ist hiernach nicht zu zweifeln, daß auch solche Kugeln, deren Masse um den Mittelpunkt vollkommen symmetrisch vertheilt ist, oder deren Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt ganz genau zusammenfällt, wenn deren Anfertigung der Technik gelingen sollte, durch die Rotation eben so gut wie die excentrischen abweichen würden.

Dadurch ist aber der Thatbestand der Frage, um deren Aufklärung es sich hier handelt, sehr wesentlich vereinfacht, indem man dabei nur eine Kugel von der oben angegebenen Beschaffenheit in Betracht

zu ziehen hat. Und wird zugleich erwogen, daß bei einem solchen Geschoße, wenn es nicht rotirt, alle Umstände rings um die Richtungslinie der fortschreitenden Geschwindigkeit des Mittelpunkts vollkommen gleich sind, so beschränkt sich die Frage eigentlich darauf, auf welche Weise durch die zur fortschreitenden Bewegung hinzutretende Umdrehung des Geschoßes eine solche Änderung der Druckverhältnisse, welche jene Abweichungen zu erzeugen vermag, entstehen könne, und worin diese Änderung bestehe.

Andere versuchte Erklärungsarten, welche die Ursache der Erscheinungen in Unebenheiten der Oberfläche der Geschoße, oder in einer aus der Umdrehung hervorgehenden Ungleichheit der Luftdichtigkeit auf entgegengesetzten Seiten des Geschoßes, zu finden glauben, werden Gegenstand näherer Erörterung seyn, und müssen ebenfalls als ungenügend bezeichnet werden. Wie bereits bemerkt, ist in dieser schwierigen Materie nur Beweisführung durch strengen Calcul, nicht durch allgemeine Andeutungen zulässig.

Demnach ist die Aufgabe, eine den Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Erklärung der erwähnten paradoxen Erscheinungen zu geben, bis jetzt noch keineswegs gelöst. Dieses nachzuweisen und den Standpunkt der Frage festzustellen, zu zeigen, daß auf den bisher betretenen Wegen das Ziel nicht erreichbar ist, und zugleich die Aufmerksamkeit der Männer vom Fache auf diesen nicht nur für die Artillerie-Wissenschaft, sondern für die gesammte Naturlehre sehr wichtigen, ihrer Bestrebungen würdigen, Gegenstand zu lenken, hierin hauptsächlich besteht der, wenn auch nur mittelbare, Beitrag zur Förderung der Sache, welchen die gegenwärtige Abhandlung bezweckt.

Erstes Capitel.

Untersuchungen über die Gesetze der Bewegung rotirender excentrischer Geschoße mit sphärischer Oberfläche, ohne Rücksicht auf die Luftreibung.

§1.

Der Widerstand, den eine, gasförmige oder tropfbare, Flüssigkeit gegen eine in ihr sich bewegende ebene Fläche, in normaler Richtung auf dieselbe, ausübt, läßt sich durch den Ausdruck $\frac{nDbv^i}{g}$ darstellen, in welchem

v die auf die Ebene der Fläche senkrecht genommene Geschwindigkeit derselben,

i einen Exponenten dieser Geschwindigkeit, der gewöhnlich gleich 2 genommen wird, hier aber unbestimmt bleibt,

b den Inhalt der ebenen Fläche,

D die Dichtigkeit der Flüssigkeit, worunter das Gewicht einer körperlichen Raumeinheit derselben in ihrem natürlichen, von der Bewegung der Fläche unabhängigen, Zustande verstanden wird,

n einen numerischen Coefficienten, der sich nach dem Werthe des Exponenten i richtet,

g die Geschwindigkeit eines im luftleeren Raume frei fallenden Körpers nach der ersten Secunde,

bedeuten.

v und g sind in Längeneinheiten, b in Flächeneinheiten, D in Gewichtseinheiten anzugeben, i ist eine abstracte Zahl, n ebenfalls, wenn i gleich 2 ist; für andere Werthe von i aber hängt n von Maßgrößen ab, so daß nv^i immer ein Flächenmaß und $\frac{nDbv^i}{g}$ ein Gewichtsmaß vorstellt. Für $i = 1$ z. B. wird durch n, für $i = 3$ durch $\frac{1}{n}$, eine Längengröße ausgedrückt.

Der Widerstand der Flüssigkeit gegen die ebene Fläche kann allgemeiner auch als eine Summe solcher Ausdrücke, wie $\frac{\alpha D b V^i}{g}$, in welchen i und α verschieden, V, b und D dagegen die gleichen Werthe haben, gedacht werden.

§ 2.

Ehe die Differential-Gleichungen der Bewegung eines sphärischen Geschosses, dessen Mittelpunkt und Schwerpunkt nicht zusammenfallen, und welches während seiner fortschreitenden Bewegung zugleich um seinen Schwerpunkt sich dreht, abgeleitet werden, wird es, um den Gang dieser Entwickelung, so wie die Art der Einwirkung des flüssigen Mittels auf die Bewegung des Körpers, leichter anschaulich zu machen, angemessen seyn, die Untersuchung vorerst auf den Widerstand der Flüssigkeit gegen den Umfang eines Kreises zu beschränken, dessen Schwerpunkt sich nach einer in die Ebene des Kreises fallenden geraden Linie fortbewegt, während der Kreis um eine auf dieser Ebene senkrechte durch den Schwerpunkt gehende Achse sich dreht.

Dieser Kreis kann als der durch die Richtungslinie des Schwerpunkts und den Mittelpunkt gehende Durchschnitt einer Kugel, welche um eine im Schwerpunkt auf der Ebene des Durchschnitts senkrecht stehende Achse rotirt, oder auch als ein mit der Grundfläche parallel geführter Durchschnitt eines Zylinders, welcher sich um eine mit der Längenachse gleichlaufende Achse dreht, betrachtet werden.

Es sey AkA' (Fig. 1) der genannte Kreis, S der Schwerpunkt, F der Mittelpunkt desselben; der Schwerpunkt bewege sich in der Linie Sc von S nach c, und der Kreis drehe sich um den Schwerpunkt in der Richtung, daß die Punkte des Umfanges A, k durch die Linie Sc auf der vorderen Seite früher gehen, als durch deren Verlängerung auf der hinteren Seite; auf eben der Seite von Sc, wo diese Punkte A, k liegen, sey durch den Schwerpunkt auf Sc senkrecht die Sg, und durch den Mittelpunkt mit Sg gleichlaufend die Fa, welche den Umfang in a schneide, gezogen. Es bedeute

l den Halbmesser des Kreises;

ε die Excentricität FS des Schwerpunkts;

c die Geschwindigkeit des Schwerpunkts in der Richtung von S nach C,

φ die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung des Kreises, d. i. den Weg, welchen irgend ein um die Längeneinheit von S entfernter Punkt der Kreisfläche in der Zeiteinheit durch die Umdrehung zurücklegt,

θ den, von Sg an gerechneten, Winkel gSF, oder den Kreisbogen, den der in der Linie SF liegende, um die Längeneinheit von S entfernte, Punkt in dem Augenblicke der Bewegung, in welchem sie betrachtet wird, beschrieben hat.

Hiernach sind l, ε, c in Längeneinheiten auszudrücken, eben so φl, die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisumfanges, und ist φ, so wie θ, eine bloße Verhältniß- oder abstracte Zahl.

Die Größen c und φ werden als beständig, oder die Bewegung als gleichförmig, angenommen.

§ 3.

Die ganze Geschwindigkeit irgend eines Punktes k des Kreisumfanges, welcher vom Durchschnittspunkt a um den von der Senkrechten Fa an nach der andern Seite zu gerechneten Winkel $aFk = \alpha$ absteht, ist zusammengesetzt aus der fortschreitenden Geschwindigkeit nach kd, welche der Geschwindigkeit c des Schwerpunkts gleich und parallel ist, und aus der auf Sk winkelrechten linearen Umdrehungsgeschwindigkeit nach ke, und muß für die vorliegende Untersuchung wieder nach zwei andern Richtungen, deren eine auf dem Umfange normal ist, die andere denselben berührt, zerlegt werden, ohne daß jedoch der für die letztere Richtung sich ergebende Theil hier weiter in Betracht kommt.

Der von der Geschwindigkeit c auf die Normale kf fallende Theil ist $= c \sin\alpha$, und hat die Richtung von k nach f, oder von innen nach außen. Wird aus dem Punkte S die Senkrechte Sh auf die wo nöthig verlängerte kF gefällt, so ist $Sh = \varepsilon \sin(\theta - \alpha)$, und die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des Punktes $h = \varphi\varepsilon \sin(\theta - \alpha)$. Eben so groß ist aber auch,

in der Richtung von k nach F genommen, die Umdrehungsgeschwindigkeit eines jeden andern, in der Linie kF liegenden Punktes k'; denn in dem Verhältniß von Sk' zu Sk oder von 1 zu sin Sk'h, in welchem die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punktes k', von k' nach e', größer ist als jene des Punktes h, wird der, bei deren Zerlegung nach der Richtung kF und der darauf senkrechten Richtung, auf kF oder k'F fallende Theil kleiner als die ganze Umdrehungsgeschwindigkeit des Punktes k. Man hat somit die Geschwindigkeit des Punktes k nach der Normalen kF, von k nach F, oder

$$V = c \sin\alpha - p\varepsilon \sin(\theta - \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

und die Geschwindigkeit des entgegengesetzten Umfangspunktes k', in der Richtung von k' nach F,

$$= c \sin(180° + \alpha) - p\varepsilon \sin(\theta - \alpha - 180°) = -(c \sin\alpha - p\varepsilon \sin(\theta - \alpha)).$$

Das Zeichen vor dem Ausdrucke für die Größe der normalen Geschwindigkeit V eines Umfangspunktes bezieht sich auf die Richtung dieser Geschwindigkeit, so, daß die positiven Geschwindigkeiten von innen nach außen, die negativen von außen in das Innere des Kreises gehen. Eine negative Geschwindigkeit kann aber keinen Widerstand erzeugen, weil das mit derselben sich bewegende Element nicht gegen die vorhandenen Theilchen der Flüssigkeit anstößt, sondern vielmehr der Berührung mit denselben sich zu entziehen und sich davon zu entfernen strebt. Es dürfen sonach nur die positiven Geschwindigkeiten in Rechnung genommen werden, und zu diesem Ende hat man zunächst diejenigen Punkte des Umfanges zu bestimmen, deren normale Geschwindigkeit gleich Null ist.

Wird durch die mit Sc gleichlaufende Fm die fortschreitende Geschwindigkeit c, durch die auf SF winkelrechte Fr die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit $p\varepsilon$ des Mittelpunktes F bezeichnet, so stellt die Diagonale Fl des Parallelogramms Fmlr, welche gleich $\sqrt{c^2 + 2cp\varepsilon\cos\theta + p^2\varepsilon^2}$ ist, die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunktes vor. Winkelrecht auf der Diagonale werde der Durchmesser bb' gezogen, und für diesen

Durchmesser der Winkel aFb mit φ bezeichnet. Im Dreieck Fbn ist

$$bn : Fn = \sin bFn : \sin Fbn,$$

oder $$c : p\varepsilon = \sin Fb' : \sin bFn = \sin(\theta - \varphi) : \sin \varphi.$$

Man hat somit

$$c \sin \varphi = p\varepsilon \sin(\theta - \varphi) \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

und hieraus folgt, daß für $\alpha = \varphi$, oder an den Durchschnittspunkten b und b', die Geschwindigkeit v gleich Null ist.

Die Gleichung (2) gibt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p\varepsilon \sin\theta}{c + p\varepsilon\cos\theta}, \quad \sin\varphi = \frac{p\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{c^2 + 2cp\varepsilon\cos\theta + p^2\varepsilon^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{c + p\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{c^2 + 2cp\varepsilon\cos\theta + p^2\varepsilon^2}} \quad \ldots (3).$$

Der Winkel φ wird gleich Null für $\theta = 0$ oder $= 180°$ etc.; $\sin\varphi$ erhält dagegen seinen größten Werth $= + \frac{p\varepsilon}{c}$ für $\begin{cases} \sin\theta = + \frac{\sqrt{c^2 - p^2\varepsilon^2}}{c}, \\ \cos\theta = - \frac{p\varepsilon}{c}, \end{cases}$

und seinen (relativ) kleinsten Werth $= - \frac{p\varepsilon}{c}$ für $\begin{cases} \sin\theta = - \frac{\sqrt{c^2 - p^2\varepsilon^2}}{c}, \\ \cos\theta = - \frac{p\varepsilon}{c}, \end{cases}$

welche beiden Werthe, wenn $p\varepsilon$ wie gewöhnlich sehr klein ist gegen c, nahe mit $\theta = 90°$ und $270°$ etc. zusammenfallen.

Der obige Ausdruck (1) für v verwandelt sich, wenn man ihn mit den so eben für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ gefundenen Ausdrücken (3) in Verbindung bringt, in

$$v = \sin(\alpha - \varphi)\sqrt{c^2 + 2cp\varepsilon\cos\theta + p^2\varepsilon^2},$$

und der letztere Ausdruck, in welchem die Wurzelgröße die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts bedeutet, zeigt, daß die beiden Punkte, in welchen der Kreisumfang von der Richtungslinie dieser Geschwindigkeit geschnitten wird, eine der letzteren Geschwindigkeit an Größe und Richtung gleiche, und zugleich die größte, normale Geschwindigkeit haben, und daß der auf dieser Richtung senkrechte Durchmesser bb' den Kreisumfang in zwei Hälften scheidet, in deren einer, der vorderen, v nur positive, und in deren anderen, der hintern, v nur negative Werthe hat, daß somit eben dieser Durchmesser die Begränzungslinie des Widerstandes bildet.

§ 4.

Wird der Kürze wegen die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts mit F bezeichnet und $\alpha - \varphi = \beta$ gesetzt, so ist der Widerstand des flüssigen Mittels gegen das um den Winkel β vom Punkt b abstehende, dem Punkte k entsprechende, Element $l d\beta$ des Kreisumfanges, nämlich

$$\frac{nDV^i l d\beta}{g} \ (\S 1) = \frac{nDlF^i \sin^i \beta \, d\beta}{g}.$$

Indem man diesen, von Punkt k geleisteten, Widerstand gegen das obengenannte Element, und eben so den Widerstand gegen sämtliche Elemente der durch den Durchmesser bb' begränzten vordern Hälfte des Kreisumfanges, nach den beiden Richtungen, deren eine auf lF senkrecht, die andere damit parallel ist, zerlegt sich denkt, heben die auf lF senkrechten Theile in dieser ganzen vordern Hälfte sich gegenseitig auf, der mit lF parallele Theil des obigen Widerstandes gegen das Element $l d\beta$ aber ist

$$= \frac{nDlF^i \sin^{i+1} \beta \, d\beta}{g},$$

und gibt, wenn R den Gesamtwiderstand gegen die genannte vordere Hälfte, oder gegen den ganzen Kreisumfang, bedeutet, durch Integration von $\beta = 0$ bis $\beta = \pi$,

$$R = \frac{nDlF^i}{g} \cdot \frac{1.3 \ldots i}{2.4 \ldots i+1} \cdot \pi, \text{ wenn } i \text{ eine ungerade positive ganze Zahl,}$$

$$= \frac{nDlF^i}{g} \, 2 \, \frac{2.4 \ldots i}{3.5 \ldots i+1}, \text{ wenn } i \text{ eine gerade positive ganze Zahl ist.}$$

Ist der Exponent i eine gebrochene Zahl oder eine negative ganze Zahl, so ergibt sich, indem man $\cos \beta = y$ setzt,

$$\int_{\pi \div 0} \sin^{i+1} \beta \, d\beta \text{ oder } \int_{1 \div -1} (1-y^2)^{\frac{i}{2}} dy \quad (*)$$

in Gestalt einer nicht abbrechenden Reihe

$$= 2\left(1 - \frac{i}{2.3} + \frac{i(i-2)}{2^2.2.5} - \frac{i(i-2)(i-4)}{2^3.2.3.7} + \frac{i(i-2)(i-4)(i-6)}{2^4.2.3.4.9} \ldots\ldots\right),$$

welche Form auch für $i = 0$ gilt. Für $i = -1$ wird diese Reihe gleich π.

Der Gesamtwiderstand gegen den Kreisumfang hat offenbar die,

(*) Nach der Bezeichnung von Ohm in dessen Lehrbuch der höheren Analysis 2r Th. Berlin 1830, § 158.

der Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts gerade entgegengesetzte, Richtung von b nach F. Wird derselbe abermals nach zwei Richtungen, wovon die eine jener des Schwerpunkts gleichlaufend, die andere darauf senkrecht ist, zerlegt, so findet sich

der mit Sc gleichlaufende, von M nach F wirkende, Widerstand $= R\cos\varphi$

$$= \frac{n\eta Dl}{g}(c+p\varepsilon\cos\theta)(c^2+2cp\varepsilon\cos\theta+p^2\varepsilon^2)^{\frac{i-1}{2}},$$

der mit Sg gleichlaufende, von F nach a wirkende, Widerstand $= R\sin\varphi$

$$= \frac{n\eta Dl}{g}\cdot p\varepsilon\sin\theta(c^2+2cp\varepsilon\cos\theta+p^2\varepsilon^2)^{\frac{i-1}{2}},$$

wo allgemein $R = \frac{n\eta Dl}{g}F^i$ gesetzt ist.

Der letztere Widerstand hat, wie man sieht, für Werthe von θ zwischen 0 und 180° die Richtung von F nach a, und für Werthe von θ zwischen 180° und 360° die Richtung von a nach F. Jedem Werthe dieses Widerstandes nach der einen Richtung entspricht ein gleicher nach der entgegengesetzten Richtung, nämlich jedem Werthe, den θ im ersten Quadranten gibt, ein gleicher im vierten, und jedem Werthe im zweiten Quadranten ein gleicher im dritten.

§5.

Den nun folgenden allgemeinen Untersuchungen über die Bewegung einer abgeschossenen rotirenden exzentrischen Kugel hat zunächst die Construktion der Differential-Gleichungen dieser doppelten Bewegung vorauszugehen. Im Allgemeinen wird hiebei dem von Poisson in Recherches etc. Seite 81 u. folg. vorgezeichneten Gange gefolgt, und werden mit wenigen, größtentheils durch die Eigenthümlichkeit der hier zu lösenden Aufgabe bedingten, Ausnahmen dieselben Bezeichnungen wie in diesem Werke angewendet, und eben so die willkührlichen Annahmen in Bezug auf die Lage und Richtung der Coordinaten-Achsen und Coordinaten-Winkel etc. nach diesem Vorgange festgesetzt werden.

Es seyen zu dem Ende

$x^\circ, y^\circ, z^\circ$ die auf die Achsen Ox°, Oy°, Oz° (1) bezogenen rechtwinkl-

(1) Die Achsen irgend eines Coordinaten-Systems werden hier immer mit den Buchstaben

ligen Coordinaten der Bahn, welche der Schwerpunkt G des Geschosses beschreibt; der Anfangspunkt O der Punkt, in welchem der Schwerpunkt das Geschützrohr verläßt; die Achse Oz^0 der von O aus nach oben sich erstreckende Theil der Vertikalen durch diesen Punkt; die Ebene der x^0 und z^0 sey die Vertikalebene durch den Punkt O, in welcher die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts liegt, und die Achse Ox^0 der Theil der Horizontalen durch O, welcher nach derselben Seite der Vertikalen Oz^0, wie diese Geschwindigkeit, der vordern Seite, geht; die Achse Oy^0 liege, indem man sich von Oz^0 aus das Gesicht nach eben dieser Seite gekehrt denkt, auf der linken Seite der genannten Vertikalebene;

x_1, y_1, z_1 die auf die Hauptachsen Gx_1, Gy_1, Gz_1 (2), welche durch den Schwerpunkt G des Geschosses gehen, und deren jede man sich auf einer bestimmten Seite dieses Punktes (im Gegensatze gegen die negative Seite derselben Achse) liegend zu denken hat, als Coordinaten-Achsen bezogenen Coordinaten irgend eines Punktes der Kugel;

λ, μ, ν die Winkel, welche die durch irgend einen Punkt M der Oberfläche des Geschosses den Achsen der x^0, y^0, z^0 parallel gezogenen Geraden (3) mit dem äußern Theil MN der durch denselben Punkt gehenden Normalen auf der Oberfläche bilden;

λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel, welche die Parallelen Mx_1, My_1, Mz_1 mit dem äußern Theile MN der Normalen am Punkt M der Oberfläche einschließen;

des Anfangspunktes der Coordinaten und mit dem Buchstaben der zugehörigen Coordinate, z. B. die Achse der x^0 durch Ox^0, bezeichnet, und hierunter der Theil der Achse auf der positiven Seite, nach welcher zu die Coordinate wächst, verstanden werden.

(2) Über den Begriff der Hauptachsen und das Verfahren, wodurch deren Lage in den Körpern bestimmt wird, vergleiche man Poisson Traité de Mécanique 1833. II. Chap. 2.

(3) Parallelen mit Coordinaten-Achsen hat man sich immer nach derselben Seite wie diese Achsen (im Gegensatze gegen die negative Seite) gezogen zu denken. Sie werden auf ähnliche Weise wie die Coordinaten-Achsen bezeichnet, z. B. eine durch den Punkt M gezogene Parallele mit der Achse Ox^0 durch Mx^0.

p, q, r die auf die Hauptachsen Gx, Gy, Gz Bezug habenden Theile der nach diesen Achsen zerlegten Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung des Geschosses um den Schwerpunkt; p wird als positiv angenommen, wenn die Umdrehung um die Achse Gx, von der Achse Gy gegen Gz (4) Statt hat; q ist positiv, wenn die Umdrehung um Gy, von Gz gegen Gx, und eben so r, wenn die Rotation um Gz, von Gx gegen Gy Statt hat; geht dagegen die Umdrehung um eine dieser Achsen nach der entgegengesetzten Seite, so wird der auf sie bezogene Theil der Winkelgeschwindigkeit als negativ betrachtet;

V der von der Totalgeschwindigkeit des Punktes M, welche aus der fortschreitenden Geschwindigkeit und der linearen Umdrehungsgeschwindigkeit desselben zusammengesetzt ist, bei deren Zerlegung nach der Normalen MN und der entsprechenden Berührenden am Punkt M auf die Normale fallende Theil, so genommen, daß V bei positivem Werthe die Richtung von M nach N oder von innen nach außen, und bei negativem Werthe die Richtung von außen nach innen hat;

M das Gewicht des Geschosses;

$\frac{A}{g}$, $\frac{B}{g}$, $\frac{C}{g}$ die auf die Hauptachsen Gx, Gy, Gz bezogenen Drehungs-Momente desselben;

g' die Geschwindigkeit, welche ein in der Flüssigkeit frei fallender Körper durch den Fall in der ersten Sekunde erlangt, oder die Größe, zu welcher g sich verhält, wie das Gewicht des Körpers im leeren Raume zum Gewicht desselben in der Flüssigkeit, welches letztere um das Gewicht des Volumens der Flüssigkeit, das der Körper einnimmt, kleiner ist als das erstere.

Die Größen x^0, y^0, z^0, λ, μ, ν, p, q, r, V sind Zeit-Functionen, und beziehen sich auf die, vom Anfange der Bewegung, dem Zeitpunkte, in welchem das Geschoß das Geschützrohr verläßt, gerechnete (in Zeiteinheiten auszudrückende) Zeit t. Die übrigen der hier aufgeführten Größen sind von der

(4) d. i. in der Richtung von Gy und zunächst gegen Gz, nicht gegen die Verlängerung von Gz auf der negativen Seite; und ähnliches bei der Drehung um die Achsen Gy und Gz.

Zeit unabhängig. Die Zeitfunctionen $\frac{dx^\circ}{dt}$, $\frac{dy^\circ}{dt}$, $\frac{dz^\circ}{dt}$ sind die auf die Achsen Ox°, Oy°, Oz° Bezug habenden Theile der nach diesen Achsen zerlegten Geschwindigkeit des Schwerpunkts G, und haben bei positivem Werthe die Richtung nach der positiven Seite der zugehörigen Achse. Eben diese Functionen, so wie x°, y°, z°; x_1, y_1, z_1, V, g, bezeichnen Längenmaße, M ein Gewichtsmaß, $\frac{A}{g}$, $\frac{B}{g}$, $\frac{C}{g}$ Producte von Gewichtsmaßen mit einem Längenmaße oder Maße von Gewichts-Momenten; λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1, p, q, r sind abstracte Zahlen.

§ 6.

Dieses vorausgeschickt, wird, wenn ferner $d\omega$ das Element der Oberfläche am Punkt M bedeutet, der normale Widerstand, den die Flüssigkeit an diesem Punkte der Bewegung des Geschosses entgegensetzt, nach dem Obigen ausgedrückt durch $\frac{nDV^2d\omega}{g}$.

Die Richtung desselben geht von N nach M, der Geschwindigkeit V entgegen. Man denke sich für einen Augenblick diesen Widerstand von M nach N gerichtet, und zerlege denselben sowohl nach den Parallelen Mx°, My°, Mz°, als auch nach den Parallelen Mx_1, My_1, Mz_1. Die Theile des Widerstandes werden seyn:

nach der Richtung der drei ersteren Parallelen

$$\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\lambda,\quad \frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\mu,\quad \frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\nu \;\ldots\ldots\; (a)$$

nach der Richtung der drei letzteren Parallelen

$$\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\lambda_1,\quad \frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\mu_1,\quad \frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\nu_1\,;$$

die Momente aber der drei letzteren Theile für die Umdrehung um die Hauptachsen werden, x_1, y_1, z_1 als Coordinaten des Punktes M angenommen, seyn:

in Bezug auf die Achse Gx_1, $\quad y_1\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\nu_1 - z_1\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\mu_1$,
in Bezug auf die Achse Gy_1, $\quad z_1\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\lambda_1 - x_1\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\nu_1$,
in Bezug auf die Achse Gz_1, $\quad x_1\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\mu_1 - y_1\frac{nDV^2d\omega}{g}\cos\lambda_1$, $\quad$ (b)

und diese Momente werden, als positiv betrachtet, die Umdrehung um die Achse Gx_1 von Gy_1 gegen Gz_1, um die Achse Gy_1 von Gz_1 gegen Gx_1, um die Achse Gz_1 von Gx_1 gegen Gy_1 zu bewirken streben.

Aus den Theilen des Widerstandes (a) ergibt sich durch Integration, in Bezug auf jede der drei Achsen Ox°, Oy°, Oz°, der nach gleichlaufenden Richtungen mit derselben auf den Körper wirkende Gesammt-Widerstand; und eben so ergeben sich aus den Momenten des Widerstandes (b) die Momente des Gesammtwiderstandes in Beziehung auf die Hauptachsen Gx, Gy, Gz. Weil aber nur gegen diejenigen Elemente der Oberfläche Widerstand Statt finden kann, deren Geschwindigkeit V von innen nach außen gerichtet ist, so hat man die Integration nur auf denjenigen Theil der Oberfläche zu erstrecken, an welchem V positive Werthe hat, und wird dieses sonach durch das Zeichen der Integration $\int_1$, welches man statt $\int$ gebraucht, andeuten.

Da der Schwerpunkt sich ganz eben so bewegt, wie wenn die Masse des Körpers in ihm vereinigt und sämtliche auf den Körper wirkenden Kräfte gleichlaufend mit ihren Richtungen an ihm angebracht wären, so stellen die auf die oben bemerkte Art genommenen Integrale der Theile (a) mit $\frac{M}{g}$, der Masse des Geschosses, dividirt, die die Bewegung des Schwerpunkts nach den Parallelen Gx°, Gy°, Gz° beschleunigenden Kräfte vor, zu welchen in Bezug auf die Parallele Gz° noch die beschleunigende Kraft der Schwere im flüssigen Mittel g' kommt, und indem man diese Kräfte beziehungsweise gleich $\frac{d^2x^\circ}{dt^2}$, $\frac{d^2y^\circ}{dt^2}$ oder $\frac{d^2z^\circ}{dt^2}$ setzt, erhält man die Differentialgleichungen für die fortschreitende Bewegung des Geschosses. Weil jedoch die beschleunigenden Kräfte $\frac{d^2x^\circ}{dt^2}$ etc. bei positiven Werthen, wie die Geschwindigkeiten $\frac{dx^\circ}{dt}$ etc., als nach den positiven Seiten der Parallelen Gx°, Gy°, Gz° gerichtet gedacht werden, der Widerstand aber die der so eben vorausgesetzten entgegengesetzte Richtung von N nach M hat, und somit, so wie die Schwerkraft, nach den negativen Seiten der Parallelen Gx° etc. wirkt, so müssen jene Integrale, wie auch g', mit negativem Zeichen genommen werden. Die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Geschosses sind daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x^\circ}{dt^2} &= -\frac{nD}{M}\int_1 V^i \cos\lambda\, d\omega, \\ \frac{d^2y^\circ}{dt^2} &= -\frac{nD}{M}\int_1 V^i \cos\mu\, d\omega, \\ \frac{d^2z^\circ}{dt^2} &= -g' - \frac{nD}{M}\int_1 V^i \cos\nu\, d\omega, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (A).$$

Eben so stellen die in der durch $\int$ angedeuteten Ausdehnung genommenen Integrale der Momente (b), durch $\frac{M}{g}$ dividirt, die Momente der die Umdrehungs-Bewegung des Geschosses um die Hauptachsen Gx_1, Gy_1, Gz_1 beschleunigenden Kräfte vor, und sind übrigens bei der Darstellung der Differential-Gleichungen für diese Bewegung aus analogen Gründen, wie die Integrale der Widerstandstheile (a), gleichfalls mit negativem Zeichen zu nehmen. Diese Gleichungen werden hiernach folgende: (*)

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)rq &= nD\int_1 (z_1 \cos\mu_1 - y_1 \cos\nu_1)\, V^2 d\omega, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= nD\int_1 (x_1 \cos\nu_1 - z_1 \cos\lambda_1)\, V^2 d\omega, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)qp &= nD\int_1 (y_1 \cos\lambda_1 - x_1 \cos\mu_1)\, V^2 d\omega, \end{aligned}\right\} \ldots (B).$$

§. 4.

Die Gleichungen (A) und (B) des vorigen § sind nicht allein für die sphärische, sondern auch für jede andere Gestalt des Geschosses gültig.

Werden unter x_1, y_1, z_1 fortwährend die auf die Hauptachsen Gx_1, Gy_1, Gz_1 bezogenen Coordinaten des Punktes M der Oberfläche verstanden, und wird die lineare Geschwindigkeit, womit dieser Punkt in Folge der Rotation sich bewegt, nach den Richtungen dieser Hauptachsen zerlegt, so sind die den Hauptachsen parallelen Theile der letztern Geschwindigkeit in jedem Augenblicke der Bewegung beziehungsweise gleich

$$qz_1 - ry_1, \qquad rx_1 - pz_1, \qquad py_1 - qx_1 \text{ (**)}.$$

Zerlegt man ferner die fortschreitende Geschwindigkeit des Punktes M, welche der Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich ist, nach denselben Richtungen, und bezeichnet die auf die Hauptachsen Gx_1, Gy_1, Gz_1 sich beziehenden Theile derselben mit x', y', z', so hat man für die normale Geschwindigkeit des Punktes M in irgend einem Augenblicke der Bewegung des Geschosses den Ausdruck

$$V = (x' + qz_1 - ry_1)\cos\lambda_1 + (y' + rx_1 - pz_1)\cos\mu_1 + (z' + py_1 - qx_1)\cos\nu_1 \text{ (***)},$$

gleichfalls für jede Gestalt des Geschosses.

(*) Poisson, Mécanique, 1833. II. No 412. Recherches, S. 87 u. 95. – Der Kürze wegen werden die hier angeführten Werke im Folgenden nur mit P. Méc. u. P. Rech. bezeichnet werden.

(**) P. Méc. II. No 408.

(***) P. Rech. p. 99.

Um nunmehr die Gleichungen (A) und (B) insbesondere für den Fall eines Geschosses mit kugelförmiger Oberfläche, dessen Mittelpunkt und Schwerpunkt nicht zusammenfallen, darzustellen, seyen

l der Halbmesser der Kugel,

$\varkappa, \delta, \varepsilon$ die auf die Hauptachsen Gx_1, Gy_1, Gz_1 bezogenen Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel, und, so wie l, gegebene, in Längeneinheiten ausgedrückte, Größen.

Die Gleichung für die Oberfläche der Kugel ist

$$\Phi = (x_1-\varkappa)^2+(y_1-\delta)^2+(z_1-\varepsilon)^2-l^2=0,$$

und man hat

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=2(x_1-\varkappa),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=2(y_1-\delta),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z_1}=2(z_1-\varepsilon),$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\right)^2=4(x_1-\varkappa)^2+4(y_1-\delta)^2+4(z_1-\varepsilon)^2=4l^2;\ \text{daher}$$

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\right)^2}}=\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}}{2l}\ \text{oder}\ \cos\lambda_1=\frac{x_1-\varkappa}{l},$$

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}}{2l}\ \text{oder}\ \cos\mu_1=\frac{y_1-\delta}{l},$$

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}}{2l}\ \text{oder}\ \cos\nu_1=\frac{z_1-\varepsilon}{l};$$

und zwar bezieht sich das Zeichen + vor der Wurzelgröße, wovon man sich leicht überzeugt, auf den äußern Theil MN der Normalen, nicht auf den innern. Man erhält demnach für ein sphärisches Geschoß

$$V=\frac{x'x_1+y'y_1+z'z_1}{l}-\frac{\varkappa x'+\delta y'+\varepsilon z'}{l}-\frac{\varkappa}{l}(qz_1-ry_1)-\frac{\delta}{l}(rx_1-pz_1)-\frac{\varepsilon}{l}(py_1-qx_1),$$

indem $\frac{x_1}{l}(qz_1-ry_1)+\frac{y_1}{l}(rx_1-pz_1)+\frac{z_1}{l}(py_1-qx_1)$ gleich Null ist.

§8.

Man lege durch den Schwerpunkt drei weitere Achsen Ga, Gb, Gc für die Coordinaten a, b, c, deren erstere die Bahn des Schwerpunkts berühre und nach derselben Seite wie dessen Bewegung gerichtet sey, die beiden andern in der auf Ga winkelrechten Ebene unter rechten Winkeln in übrigens unbestimmter Lage sich schneiden, denke sich durch den Punkt M der Oberfläche

eine Parallele Ma, so wie bisher die Parallelen $Mx_{,}$, $My_{,}$, $Mz_{,}$, gelegt, bezeichne die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, deren nach den Richtungen der Hauptaxen $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$ gehende Theile x', y', z' sind, für den Augenblick, auf welchen die übrigen Zeitfunctionen sich beziehen, vorerst mit f, und setze

$$\cos x_{,}Ga = \rho, \quad \cos y_{,}Ga = \sigma, \quad \cos z_{,}Ga = \tau,$$
$$\cos x_{,}Gb = \rho', \quad \cos y_{,}Gb = \sigma', \quad \cos z_{,}Gb = \tau',$$
$$\cos x_{,}Gc = \rho'', \quad \cos y_{,}Gc = \sigma'', \quad \cos z_{,}Gc = \tau''.$$

Nach diesen Beziehungen hat man (*), unter a, b, c die Coordinaten des Punktes M verstanden,

$$x' = \rho f, \quad x_{,} = \rho a + \rho' b + \rho'' c, \quad a = \rho x_{,} + \sigma y_{,} + \tau z_{,},$$
$$y' = \sigma f, \quad y_{,} = \sigma a + \sigma' b + \sigma'' c, \quad b = \rho' x_{,} + \sigma' y_{,} + \tau' z_{,},$$
$$z' = \tau f, \quad z_{,} = \tau a + \tau' b + \tau'' c, \quad c = \rho'' x_{,} + \sigma'' y_{,} + \tau'' z_{,},$$

und finden ferner folgende Beziehungen Statt:

$$\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 1, \quad \rho^2 + \rho'^2 + \rho''^2 = 1,$$
$$\rho'^2 + \sigma'^2 + \tau'^2 = 1, \quad \sigma^2 + \sigma'^2 + \sigma''^2 = 1,$$
$$\rho''^2 + \sigma''^2 + \tau''^2 = 1, \quad \tau^2 + \tau'^2 + \tau''^2 = 1,$$
$$\rho\rho' + \sigma\sigma'' + \tau\tau' = 0, \quad \rho\sigma + \rho'\sigma' + \rho''\sigma'' = 0,$$
$$\rho\rho'' + \sigma\sigma'' + \tau\tau'' = 0, \quad \rho\tau + \rho'\tau' + \rho''\tau'' = 0,$$
$$\rho'\rho'' + \sigma'\sigma'' + \tau'\tau'' = 0, \quad \sigma\tau + \sigma'\tau' + \sigma''\tau'' = 0;$$

woraus sich findet

$$V = \frac{f}{l}\rho(\rho a + \rho' b + \rho'' c) + \frac{f}{l}\sigma(\sigma a + \sigma' b + \sigma'' c) + \frac{f}{l}\tau(\tau a + \tau' b + \tau'' c) - \frac{\varkappa}{l}\big(\rho f + q(\tau a + \tau' b + \tau'' c) - r(\sigma a + \sigma' b + \sigma'' c)\big)$$
$$- \frac{\delta}{l}\big(\sigma f + r(\rho a + \rho' b + \rho'' c) - p(\tau a + \tau' b + \tau'' c)\big) - \frac{\varepsilon}{l}\big(\tau f + p(\sigma a + \sigma' b + \sigma'' c) - q(\rho a + \rho' b + \rho'' c)\big),$$
$$= \frac{f}{l}a - \frac{f}{l}(\rho\varkappa + \sigma\delta + \tau\varepsilon) - \frac{\varkappa}{l}\big((q\tau - r\sigma)a + (q\tau' - r\sigma')b + (q\tau'' - r\sigma'')c\big) - \frac{\delta}{l}\big((r\rho - p\tau)a + (r\rho' - p\tau')b + (r\rho'' - p\tau'')c\big)$$
$$- \frac{\varepsilon}{l}\big((p\sigma - q\rho)a + (p\sigma' - q\rho')b + (p\sigma'' - q\rho'')c\big).$$

Nimmt man hierauf für den Punkt M der Oberfläche andere Coordinaten $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ an, deren Axen parallel mit den Axen Ga, Gb, Gc durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, für welchen die Coordinaten a, b, c die Werthe $\rho\varkappa + \sigma\delta + \tau\varepsilon$, $\rho'\varkappa + \sigma'\delta + \tau'\varepsilon$, $\rho''\varkappa + \sigma''\delta + \tau''\varepsilon$ haben, so daß

(*) P. Méc. II. no 377.

$$a = a_1 + \rho\varkappa + \sigma\delta + \tau\varepsilon, \quad b = b_1 + \rho'\varkappa + \sigma'\delta + \tau'\varepsilon, \quad c = c_1 + \rho''\varkappa + \sigma''\delta + \tau''\varepsilon$$

ist, so wird

$$V = \frac{f}{l}a_1 - \frac{\varkappa}{l}\big((q\tau - r\sigma)a_1 + (q\tau' - r\sigma')b_1 + (q\tau'' - r\sigma'')c_1\big) - \frac{\delta}{l}\big((r\rho - p\tau)a_1 + (r\rho' - p\tau')b_1 + (r\rho'' - p\tau'')c_1\big)$$
$$- \frac{\varepsilon}{l}\big((p\sigma - q\rho)a_1 + (p\sigma' - q\rho')b_1 + (p\sigma'' - q\rho'')c_1\big),$$
$$= \Big(\frac{f}{l} - \frac{\varkappa}{l}(q\tau - r\sigma) - \frac{\delta}{l}(r\rho - p\tau) - \frac{\varepsilon}{l}(p\sigma - q\rho)\Big)a_1 - \Big(\frac{\varkappa}{l}(q\tau' - r\sigma') + \frac{\delta}{l}(r\rho' - p\tau') + \frac{\varepsilon}{l}(p\sigma' - q\rho')\Big)b_1$$
$$- \Big(\frac{\varkappa}{l}(q\tau'' - r\sigma'') + \frac{\delta}{l}(r\rho'' - p\tau'') + \frac{\varepsilon}{l}(p\sigma'' - q\rho'')\Big)c_1,$$

indem alle übrigen Glieder vermöge der obigen Beziehungen sich aufheben.

Dieser letztere Ausdruck zeigt, daß die Fläche, welche $V = 0$ zur Gleichung hat, eine Ebene ist, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, woraus dann weiter folgt, daß der Widerstand der Flüssigkeit gegen die Kugel, auch wenn sie rotirt, in jedem Augenblicke der Bewegung sich nur auf die eine Hälfte der Oberfläche derselben erstreckt. Die der Gleichung $V = 0$ entsprechende Ebene, welche beide Hälften von einander trennt, kann man die <u>Begränzungs-Ebene des Widerstandes</u> heißen.

§9.

Um den Ausdruck für V für den Zweck der vorliegenden Aufgabe weiter anzuwenden, führe man wieder drei neue, im Mittelpunkt F sich schneidende, rechtwinkliche Achsen Fa', Fb', Fc' für die, dem Punkt M der Oberfläche zugehörigen, Coordinaten a', b', c' ein, so daß die Begränzungs-Ebene des Widerstandes die Ebene der b' und c' bildet, und die Achse Fa' auf derselben Seite der Ebene der b_1 und c_1, wie die Achse Fa_1 liegt. Nimmt man

$$\cos a_1Fa' = u, \quad \cos b_1Fa' = v, \quad \cos c_1Fa' = w,$$
$$\cos a_1Fb' = u', \quad \cos b_1Fb' = v', \quad \cos c_1Fb' = w',$$
$$\cos a_1Fc' = u'', \quad \cos b_1Fc' = v'', \quad \cos c_1Fc' = w'',$$

so sind die Größen u, v, w, u' etc. durch dieselben Beziehungen unter sich verbunden, wie die Größen $\rho, \sigma, \tau, \rho'$ etc. des vorigen §, man hat

$$a_1 = ua' + u'b' + u''c',$$
$$b_1 = va' + v'b' + v''c',$$
$$c_1 = wa' + w'b' + w''c',$$

und es sind nun die Beziehungen, welche zwischen den Größen u, v, w etc. und den früher eingeführten Größen Statt finden, zu bestimmen.

Man nehme zu diesem Ende Fb_1, Fc_1 in der Fig. 2 als die Achsen der b_1 und c_1, denke sich die Achse Fa_1 senkrecht auf die Ebene der Figur nach oben gerichtet, und die Linie Fb' als die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Begränzungsebene des Widerstandes, deren Gleichung $V=0$ ist. Man setze ferner zur Abkürzung $V = \mathfrak{F}a_1 + \mathfrak{K}b_1 + \mathfrak{L}c_1$, und betrachte die Coefficienten $\mathfrak{F}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ als positiv.

Der Cosinus des dem Neigungswinkel beider in Fb' sich schneidenden Ebenen gleichen Winkels a_1Fa', oder u, ist $= \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}}$, und da die Halbachsen Fa_1 und Fa' als auf derselben Seite der Ebene b_1Fc_1 liegend vorausgesetzt werden, so ist die Wurzelgröße $\sqrt{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}$ positiv zu nehmen.

Die Gleichung $V=0$ ist für $a_1=0$ zugleich die Gleichung der Durchschnittslinie Fb', und giebt $c_1 = -\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{L}}b_1$. Nimt man diese Durchschnittslinie, welche mit der Achse Fb_1 den spitzen Winkel b_1Fb', mit der Achse Fc_1 den Winkel $90^\circ + b_1Fb'$ bildet, (so daß der Winkel b_1Fb', wenn er zwischen Fb_1 und Fc_1 fällt, als negativ zu betrachten ist,) als die Achse der (positiven) b', so hat man

$$tg\, b_1Fb' = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{L}}, \quad \cos b_1Fb' \text{ oder } v' = \frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}}, \quad \sin b_1Fb' = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}},$$
$$\cos c_1Fb' \text{ oder } w' = -\sin b_1Fb' = -\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}},$$

und die Wurzelgröße $\sqrt{\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}$ ist gleichfalls positiv zu nehmen.

Wird die Achse Fc', so wie Fa', auf der oberen Seite der Ebene b_1Fc_1 angenommen, so ist auch der Winkel a_1Fc' spitz, und

$$\cos a_1Fc' = \sin a_1Fa' \text{ oder } u'' = \sqrt{\frac{\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}}.$$

Da vermöge der Gleichung $\mathfrak{F}a_1 + \mathfrak{K}b_1 + \mathfrak{L}c_1 = 0$ auf derjenigen Seite der Ebene a_1Fb', auf welcher die (positiven) Halbachsen Fb_1 und Fc_1 liegen, die a_1 negativ werden, und somit der auf derselben Seite dieser Ebene liegende Theil der Begränzungsebene auf die untere Seite der Ebene b_1Fc_1 fällt, so fallen auch die Achse Fa' und ihre Projection auf der Ebene b_1Fc_1 auf die genannte Seite der Ebene a_1Fb', und man hat nach den Sätzen der sphärischen Trigonometrie

$$\cos c_1Fa' \text{ oder } w = \cos a_1Fc' \,.\, \cos b_1Fb' = u''v' = \frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}},$$
$$\cos b_1Fa' \text{ oder } v = \cos a_1Fc' \,.\, \sin b_1Fb' = u''\sqrt{1-v'^2} = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2}}.$$

Endlich erhält man aus den Gleichungen

$$uv + u'v' + u''v'' = 0,$$

$$uw + u'w' + u''w'' = 0,$$

in welchen u' oder $\cos a,Fb' = 0$ ist,

$$v'' \text{ oder } \cos b,Fc' = -\frac{uv}{u''} = -u\sqrt{1-v^2} = -\frac{FK}{\sqrt{K^2+L^2}\,\sqrt{F^2+K^2+L^2}},$$

$$w'' \text{ oder } \cos c,Fc' = -\frac{uw}{u''} = -uw' = -\frac{FL}{\sqrt{K^2+L^2}\,\sqrt{F^2+K^2+L^2}}.$$

Man hat somit

$$u = \frac{F}{\sqrt{F^2+K^2+L^2}}, \quad v = \frac{K}{\sqrt{F^2+K^2+L^2}}, \quad w = \frac{L}{\sqrt{F^2+K^2+L^2}},$$

$$u' = 0, \quad v' = \frac{L}{\sqrt{K^2+L^2}}, \quad w' = -\frac{K}{\sqrt{K^2+L^2}},$$

$$u'' = \sqrt{\frac{K^2+L^2}{F^2+K^2+L^2}}, \quad v'' = \frac{-FK}{\sqrt{K^2+L^2}\,\sqrt{F^2+K^2+L^2}}, \quad w'' = \frac{-FL}{\sqrt{K^2+L^2}\,\sqrt{F^2+K^2+L^2}},$$

und findet hieraus

$$Fu + Kv + Lw = \sqrt{F^2+K^2+L^2},$$

$$Fu' + Kv' + Lw' = 0,$$

$$Fu'' + Kv'' + Lw'' = 0,$$

so wie $Fa, + Kb, + Lc,$ oder $(Fu + Kv + Lw)\,a' + (Fu' + Kv' + Lw')\,b' + (Fu'' + Kv'' + Lw'')\,c'$

$$= \sqrt{F^2+K^2+L^2}\,.\;a'.$$

Wenn auch die Coefficienten F, K, L alle oder zum Theil negativ sind, so erhält man dennoch dasselbe End-Resultat. Nur ändert sich bei der vorausgesetzten Lage der Achse Fa' mit dem Zeichen des Coefficienten F auch das Zeichen der Wurzelgröße $\sqrt{F^2+K^2+L^2}$, auf welches die Zeichen von K und L keinen Einfluß haben. Der Coefficient F muß indessen hier als positiv betrachtet werden.

Da die Lage der unter sich rechtwinkligen Achsen der Coordinaten $b,$ und $c,$ in ihrer Ebene übrigens unbestimmt gelassen ist, so läßt sich diese Lage nach willkürlichen Voraussetzungen gemäß annehmen. Man kann z. B. die Achse der $b,$ oder der $c,$ mit

der zur Achse der b genommenen Durchschnittslinie der Begränzungsebene und der Ebene der b und c zusammenfallen lassen, wodurch K oder L gleich Null wird.

§ 10.

Aus der Umformung des vorigen § ergibt sich

$$V = \sqrt{\Big[\Big(\frac{f}{l} - \frac{\varkappa}{l}(q\tau - r\sigma) - \frac{\delta}{l}(r\rho - p\tau) - \frac{\varepsilon}{l}(p\sigma - q\rho)\Big)^2 + \Big(\frac{\varkappa}{l}(q\tau' - r\sigma') + \frac{\delta}{l}(r\rho' - p\tau') + \frac{\varepsilon}{l}(p\sigma' - q\rho')\Big)^2 + \Big(\frac{\varkappa}{l}(q\tau'' - r\sigma'') + \frac{\delta}{l}(r\rho'' - p\tau'') + \frac{\varepsilon}{l}(p\sigma'' - q\rho'')\Big)^2\Big]} \cdot a',$$

$$= \sqrt{\Big[\Big(\frac{f}{l}\Big)^2 - 2\frac{f}{l}\cdot\frac{\varkappa(q\tau - r\sigma) + \delta(r\rho - p\tau) + \varepsilon(p\sigma - q\rho)}{l} + \frac{(\varkappa q - \delta p)^2 + (\delta r - \varepsilon q)^2 + (\varepsilon p - \varkappa r)^2}{l^2}\Big]} \cdot a',$$

$$= \sqrt{\Big[f^2 + 2f\big(\rho(q\varepsilon - r\delta) + \sigma(r\varkappa - p\varepsilon) + \tau(p\delta - q\varkappa)\big) + (q\varepsilon - r\delta)^2 + (r\varkappa - p\varepsilon)^2 + (p\delta - q\varkappa)^2\Big]} \cdot \frac{a'}{l}.$$

Die Geschwindigkeit des Mittelpunktes F der Kugel ist, so wie die irgend eines Punktes M der Oberfläche, aus der fortschreitenden Geschwindigkeit f des Geschosses, und aus der Geschwindigkeit, welche er vermöge der Umdrehung um den Schwerpunkt hat, zusammengesetzt. Wird jede dieser beiden Geschwindigkeiten nach den Richtungen der Hauptachsen Gx, Gy, Gz zerlegt, so sind die diesen Achsen parallelen Theile der Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts (§ 7 u. 8)

$$\rho f + q\varepsilon - r\delta,$$
$$\sigma f + r\varkappa - p\varepsilon,$$
$$\tau f + p\delta - q\varkappa,$$

und die letztere Geschwindigkeit selbst, absolut genommen, $= \sqrt{F^2 + K^2 + L^2}\,.\,l$. Wird sie mit F bezeichnet, so ist demnach $V = F\cdot\frac{a'}{l}$, oder die nach außen gerichtete Geschwindigkeit irgend eines Punktes M der Oberfläche der Kugel nach der Normalen MN in jedem Zeitpunkte der Bewegung gleich der Totalgeschwindigkeit F des Mittelpunktes, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, den der Halbmesser FM mit der Begränzungsebene bildet, welcher Winkel bei der vorderen der durch diese Ebene abgeschiedenen Halbkugeln positiv, bei der hinteren negativ zu nehmen ist.

Werden ferner mit x, Fa'; y, Fa'; z, Fa' die Winkel bezeichnet, welche die durch den Mittelpunkt den Hauptachsen des Schwerpunkts parallel gezogenen Fx, Fy, Fz, mit der auf der Begränzungsebene senkrechten Achse Fa' bilden, so hat man

$$\cos x, Fa' = \rho u + \rho' v + \rho'' w = \frac{\rho \mathfrak{F} + \rho' \mathfrak{K} + \rho'' \mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{K}^2 + \mathfrak{L}^2}},$$

$$\cos y, Fa' = \sigma u + \sigma' v + \sigma'' w = \frac{\sigma \mathfrak{F} + \sigma' \mathfrak{K} + \sigma'' \mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{K}^2 + \mathfrak{L}^2}},$$

$$\cos z, Fa' = \tau u + \tau' v + \tau'' w = \frac{\tau \mathfrak{F} + \tau' \mathfrak{K} + \tau'' \mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{K}^2 + \mathfrak{L}^2}},$$

und findet

$$\frac{\rho \mathfrak{F} + \rho' \mathfrak{K} + \rho'' \mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{K}^2 + \mathfrak{L}^2}} = \frac{\rho \mathfrak{f} + q\varepsilon - r\delta}{\mathfrak{F}},$$

$$\frac{\sigma \mathfrak{F} + \sigma' \mathfrak{K} + \sigma'' \mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{K}^2 + \mathfrak{L}^2}} = \frac{\sigma \mathfrak{f} + r\alpha - p\varepsilon}{\mathfrak{F}},$$

$$\frac{\tau \mathfrak{F} + \tau' \mathfrak{K} + \tau'' \mathfrak{L}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{K}^2 + \mathfrak{L}^2}} = \frac{\tau \mathfrak{f} + p\delta - q\alpha}{\mathfrak{F}},$$

oder, da die Durchgrößen $\frac{\rho \mathfrak{f} + q\varepsilon - r\delta}{\mathfrak{F}}$, $\frac{\sigma \mathfrak{f} + r\alpha - p\varepsilon}{\mathfrak{F}}$, $\frac{\tau \mathfrak{f} + p\delta - q\alpha}{\mathfrak{F}}$ die Cosinus der Winkel ausdrücken, welche die Parallelen Fx, Fy, Fz mit der Richtung der Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts einschließen, diese Winkel gleich den Winkeln x, Fa', y, Fa', z, Fa'. Die Richtung der Bewegung des Mittelpunkts fällt daher in jedem Augenblicke mit der auf der Begränzungsebene senkrechten Achse Fa' zusammen, während der Schwerpunkt nach der auf der Ebene der b und c senkrechten Ga sich bewegt.

§11.

Um nunmehr die in den Ausdrücken $\int V' \cos\lambda\, d\omega$ etc., $\int (z \cos\mu, - y \cos\nu) V' d\omega$ etc. der Gleichungen (A) und (B) durch das Zeichen $\int$ angedeutete Integration zu bewerkstelligen, hat man die auf die Oberfläche der Kugel sich beziehenden rechtwinklichen Coordinaten a', b', c' in Polar-Coordinaten überzusetzen.

Bedeutet zu diesem Ende ζ den Winkel zwischen dem Halbmesser FM und der Achse Fa', η den von der Achse Fb' an in der Richtung zunächst gegen die Achse Fc' (nicht gegen deren Verlängerung auf der negativen Seite) gerechneten Winkel zwischen der Achse Fb' und der Projection des Halbmessers FM auf der Ebene $b'Fc'$, so hat man

$$a' = l \cos\zeta,\ b' = l \sin\zeta \cos\eta,\ c' = l \sin\zeta \sin\eta,\ d\omega = l^2 \sin\zeta\, d\zeta\, d\eta. \quad (*)$$

(*) P. Méc. I. no 9 u. 93.

Werden durch die Punkte F und M Parallelen mit den Achsen Ox°, Oy°, Oz°, und durch den Punkt M ferner Parallelen mit den Achsen Fa, Fb, Fc gelegt gedacht, und setzt man

$$\cos a, Fx^\circ = h,\quad \cos b, Fx^\circ = k,\quad \cos c, Fx^\circ = m,$$
$$\cos a, Fy^\circ = h',\quad \cos b, Fy^\circ = k',\quad \cos c, Fy^\circ = m',$$
$$\cos a, Fz^\circ = h'',\quad \cos b, Fz^\circ = k'',\quad \cos c, Fz^\circ = m'',$$

so ist $\cos a, MN = \frac{a_1}{l}$, $\cos b, MN = \frac{b_1}{l}$, $\cos c, MN = \frac{c_1}{l}$, und

$$\cos\lambda = h\frac{a_1}{l} + k\frac{b_1}{l} + m\frac{c_1}{l},$$
$$\cos\mu = h'\frac{a_1}{l} + k'\frac{b_1}{l} + m'\frac{c_1}{l},$$
$$\cos\nu = h''\frac{a_1}{l} + k''\frac{b_1}{l} + m''\frac{c_1}{l},$$

daher
$$l\cos\lambda = (hu + kv + mw)\,a' + (hu' + kv' + mw')\,b' + (hu'' + kv'' + mw'')\,c',$$
$$l\cos\mu = (h'u + k'v + m'w)\,a' + (h'u' + k'v' + m'w')\,b' + (h'u'' + k'v'' + m'w'')\,c',$$
$$l\cos\nu = (h''u + k''v + m''w)\,a' + (h''u' + k''v' + m''w')\,b' + (h''u'' + k''v'' + m''w'')\,c'.$$

Da V, unter F die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts (§10) verstanden, $= F\cos\zeta$ ist, so nimmt das Differential $V^i\cos\lambda\, d\omega$, wenn P, Q, R Größen vorstellen, welche von den Winkeln ζ und η unabhängig sind, die Form

$$P\cos^{i+1}\zeta\sin\zeta\, d\zeta\, d\eta + Q\cos^i\zeta\sin^2\zeta\cos\eta\, d\zeta\, d\eta + R\cos^i\zeta\sin^2\zeta\sin\eta\, d\zeta\, d\eta$$

an, und dasselbe ist vermöge der Bedeutung des Zeichens $\int_1$ (§6) so zu integrieren, daß das Integral von $\zeta = 0$ bis $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, und von $\eta = 0$ bis $\eta = 2\pi$, genommen wird. Dadurch fallen aber die den Factor $\cos\eta$ oder $\sin\eta$, d. i. den Factor b' oder c', enthaltenden Glieder heraus, so daß sie gleich von jetzt an außer Acht gelassen werden können; das Integral $\int_{\frac{1}{2}\pi+0}\cos^{i+1}\zeta\sin\zeta\, d\zeta$ dagegen wird, der Exponent i mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative, Zahl seyn, gefunden $= \frac{1}{i+2}$, oder das Integral $\int_1\cos^{i+1}\zeta\sin\zeta\, d\zeta\, d\eta = \frac{2\pi}{i+2}$, und die Größe P ist $= F^i l^2 (hu + kv + mw)$.

Nimmt man noch

$$\cos x, Fx^\circ = \alpha,\quad \cos y, Fx^\circ = \beta,\quad \cos z, Fx^\circ = \gamma,$$
$$\cos x, Fy^\circ = \alpha',\quad \cos y, Fy^\circ = \beta',\quad \cos z, Fy^\circ = \gamma',$$
$$\cos x, Fz^\circ = \alpha'',\quad \cos y, Fz^\circ = \beta'',\quad \cos z, Fz^\circ = \gamma'',$$

so wird $h = \alpha\varrho + \beta\sigma + \gamma\tau$, $k = \alpha\varrho' + \beta\sigma' + \gamma\tau'$, $m = \alpha\varrho'' + \beta\sigma'' + \gamma\tau''$,
daher $hu + kv + mw = \alpha(\varrho u + \varrho' v + \varrho'' w) + \beta(\sigma u + \sigma' v + \sigma'' w) + \gamma(\tau u + \tau' v + \tau'' w)$,

$$= \frac{\alpha\rho\mathfrak{F} + \alpha(q\varepsilon - r\delta) + \beta\sigma\mathfrak{F} + \beta(r\varkappa - p\varepsilon) + \gamma\tau\mathfrak{F} + \gamma(p\delta - q\varkappa)}{\mathfrak{F}} \quad (§10),$$

$$= \frac{h\mathfrak{F} + \alpha(q\varepsilon - r\delta) + \beta(r\varkappa - p\varepsilon) + \gamma(p\delta - q\varkappa)}{\mathfrak{F}},$$

und $P = \mathfrak{F}^{i-1} l^2 \left(h\mathfrak{F} + \alpha(q\varepsilon - r\delta) + \beta(r\varkappa - p\varepsilon) + \gamma(p\delta - q\varkappa)\right)$.

Es ergibt sich hieraus

$$\int_1 V^i \cos\lambda \, d\omega = \frac{2\pi l^2}{i+2} \mathfrak{F}^{i-1} \left[h\mathfrak{F} + \alpha(q\varepsilon - r\delta) + \beta(r\varkappa - p\varepsilon) + \gamma(p\delta - q\varkappa)\right],$$

und eben so erhält man, indem man $h'u + k'v + m'w$ oder $h''u + k''v + m''w$ an die Stelle von $hu + kv + mw$ in P setzt,

$$\int_1 V^i \cos\mu \, d\omega = \frac{2\pi l^2}{i+2} \mathfrak{F}^{i-1} \left[h'\mathfrak{F} + \alpha'(q\varepsilon - r\delta) + \beta'(r\varkappa - p\varepsilon) + \gamma'(p\delta - q\varkappa)\right],$$

$$\int_1 V^i \cos\nu \, d\omega = \frac{2\pi l^2}{i+2} \mathfrak{F}^{i-1} \left[h''\mathfrak{F} + \alpha''(q\varepsilon - r\delta) + \beta''(r\varkappa - p\varepsilon) + \gamma''(p\delta - q\varkappa)\right].$$

§12.

In Bezug auf die Integral-Ausdrücke $\int_1 (z_1 \cos\mu_1 - y_1 \cos\nu_1) V^i d\omega$ etc. hat man (§7)

$$z_1 \cos\mu_1 - y_1 \cos\nu_1 = z_1 \cdot \frac{y_1 - \delta}{l} - y_1 \cdot \frac{z_1 - \varepsilon}{l} = \frac{\varepsilon y_1 - \delta z_1}{l},$$

$$x_1 \cos\nu_1 - z_1 \cos\lambda_1 = x_1 \cdot \frac{z_1 - \varepsilon}{l} - z_1 \cdot \frac{x_1 - \varkappa}{l} = \frac{\varkappa z_1 - \varepsilon x_1}{l},$$

$$y_1 \cos\lambda_1 - x_1 \cos\mu_1 = y_1 \cdot \frac{x_1 - \varkappa}{l} - x_1 \cdot \frac{y_1 - \delta}{l} = \frac{\delta x_1 - \varkappa y_1}{l},$$

und (nach §8)

$$x_1 = \rho(a_1 + \rho\varkappa + \sigma\delta + \tau\varepsilon) + \rho'(b_1 + \rho'\varkappa + \sigma'\delta + \tau'\varepsilon) + \rho''(c_1 + \rho''\varkappa + \sigma''\delta + \tau''\varepsilon) = \varkappa + \rho a_1 + \rho' b_1 + \rho'' c_1,$$

$$= \varkappa + (\rho u + \rho' v + \rho'' w) a' + (\rho u' + \rho' v' + \rho'' w') b' + (\rho u'' + \rho' v'' + \rho'' w'') c' \quad (§9),$$

$$y_1 = \delta + (\sigma u + \sigma' v + \sigma'' w) a' + (\sigma u' + \sigma' v' + \sigma'' w') b' + (\sigma u'' + \sigma' v'' + \sigma'' w'') c',$$

$$z_1 = \varepsilon + (\tau u + \tau' v + \tau'' w) a' + (\tau u' + \tau' v' + \tau'' w') b' + (\tau u'' + \tau' v'' + \tau'' w'') c'.$$

Man sieht, daß, wenn statt a', b', c' wieder Polar-Coordinaten eingeführt, und die Differentiale $(z_1 \cos\mu_1 - y_1 \cos\nu_1) V^i d\omega$ etc. innerhalb der durch das Zeichen $\int_1$ angedeuteten Gränzen integrirt werden, die mit b' und c' multiplicirten Glieder wie im vorigen § herausfallen, und daß man diese Glieder demnach sogleich außer Acht lassen darf.

Man kann somit für die weitere folgende Rechnung setzen:

$$z_1 \cos\mu_1 - y_1 \cos\nu_1 = \left(\varepsilon(\sigma u + \sigma' v + \sigma'' w) - \delta(\tau u + \tau' v + \tau'' w)\right) \cos\zeta,$$

$$= \frac{\varepsilon(\sigma\mathfrak{F} + r\varkappa - p\varepsilon) - \delta(\tau\mathfrak{F} + p\delta - q\varkappa)}{\mathfrak{F}} \cos\zeta,$$

$$(z_1 \cos\mu_1 - y_1 \cos\nu_1) V^i d\omega = \left(\varepsilon(\sigma\mathfrak{F} + r\varkappa - p\varepsilon) - \delta(\tau\mathfrak{F} + p\delta - q\varkappa)\right) \mathfrak{F}^{i-1} l^2 \cos^{i+1}\zeta \sin\zeta \, d\zeta \, d\eta$$

und findet hieraus

$$\int_1 (z_1 \cos\mu_1 - y_1 \cos\nu_1) V^i d\omega = \frac{2\pi l^2}{i+2} \mathfrak{F}^{i-1} \left[\varepsilon(\sigma F + r\varkappa - p\varepsilon) - \delta(\tau F + p\delta - q\varkappa)\right].$$

Auf gleiche Weise ergibt sich

$$\int_1 (x_1 \cos\nu_1 - z_1 \cos\lambda_1) V^i d\omega = \frac{2\pi l^2}{i+2} \mathfrak{F}^{i-1} \left[\varkappa(\tau F + p\delta - q\varkappa) - \varepsilon(\rho F + q\varepsilon - r\delta)\right],$$

$$\int_1 (y_1 \cos\lambda_1 - x_1 \cos\mu_1) V^i d\omega = \frac{2\pi l^2}{i+2} \mathfrak{F}^{i-1} \left[\delta(\rho F + q\varepsilon - r\delta) - \varkappa(\sigma F + r\varkappa - p\varepsilon)\right].$$

§13.

Nennt man s^0 die Bogenlänge der Bahn, welche der Schwerpunkt G der Kugel vom Anfangspunkt O der Bewegung an bis zu dem Punkt, wo er sich nach Verfluß der Zeit t befindet, und welchem die Coordinaten x^0, y^0, z^0 zugehören, beschrieben hat, so ist die bisher mit F (§8) bezeichnete Geschwindigkeit des Schwerpunkts, oder die fortschreitende Geschwindigkeit des Geschosses, in diesem Zeitpunkte $= \frac{ds^0}{dt}$, und da die Winkel aGx^0, aGy^0, aGz^0 beziehungsweise gleich a_1Ox^0, a_1Oy^0, a_1Oz^0 sind, so ist (§11)

$$h = \frac{dx^0}{ds^0}, \quad h' = \frac{dy^0}{ds^0}, \quad h'' = \frac{dz^0}{ds^0}; \quad hF = \frac{dx^0}{dt}, \quad h'F = \frac{dy^0}{dt}, \quad h''F = \frac{dz^0}{dt}.$$

Weil ferner $\rho = h\alpha + h'\alpha' + h''\alpha''$, $\sigma = h\beta + h'\beta' + h''\beta''$, $\tau = h\gamma + h'\gamma' + h''\gamma''$ ist, so hat man

$$\rho F = \alpha \frac{dx^0}{dt} + \alpha' \frac{dy^0}{dt} + \alpha'' \frac{dz^0}{dt}, \quad \sigma F = \beta \frac{dx^0}{dt} + \beta' \frac{dy^0}{dt} + \beta'' \frac{dz^0}{dt}, \quad \tau F = \gamma \frac{dx^0}{dt} + \gamma' \frac{dy^0}{dt} + \gamma'' \frac{dz^0}{dt},$$

und die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts in demselben Zeitpunkte, oder

$$\mathfrak{F} = \sqrt{\left[\left(\alpha \frac{dx^0}{dt} + \alpha' \frac{dy^0}{dt} + \alpha'' \frac{dz^0}{dt} + q\varepsilon - r\delta\right)^2 + \left(\beta \frac{dx^0}{dt} + \beta' \frac{dy^0}{dt} + \beta'' \frac{dz^0}{dt} + r\varkappa - p\varepsilon\right)^2 + \left(\gamma \frac{dx^0}{dt} + \gamma' \frac{dy^0}{dt} + \gamma'' \frac{dz^0}{dt} + p\delta - q\varkappa\right)^2\right]}.$$

Dadurch sind die unbekannten veränderlichen Größen in den Gleichungen (A) und (B) auf die Coordinaten x^0, y^0, z^0, deren Differentiale, und auf die Größen p, q, r, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, so wie die Differentiale von p, q, r zurückgebracht.

Die neun Zeit-Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ hängen aber sämtlich von der Lage der im Körper festen und mit ihm beweglichen Hauptachsen Gx, Gy, Gz, gegen die sich stets parallel bleibenden Richtungen Gx^0, Gy^0, Gz^0 ab, und da es zur Bestimmung dieser Lage nur dreier Winkel bedarf, so lassen sich die genannten Functionen durch diese drei Winkel ausdrücken. Und auf eben diese Winkel und deren Differentiale lassen sich auch die Größen p, q, r zurückführen, so daß die Zahl aller Unbekannten in den Gleichungen (A) und (B), wie die Zahl der letztern, außer der Veränderlichen t eigentlich nur sechs beträgt, welche eben durch diese Gleichungen ihre Bestimmung finden.

Ist nämlich in irgend einem Augenblicke der Bewegung t, GL die Durchschnittslinie der beweglichen Ebene $x_,Gy_,$, welche die zwei als die Achsen der $x_,$ und $y_,$ angenommenen Hauptachsen enthält, mit der Horizontalebene x^0Gy^0, und setzt man

$$x^0GL = \psi, \quad LGx_, = \varphi, \quad z^0Gz_, = \theta,$$

so genügen die mit der Zeit veränderlichen drei Winkel ψ, φ, θ, nach Festsetzung der Richtungen, nach welchen sie zu rechnen sind, die Lage gegen die Parallelen Gx^0, Gy^0, Gz^0, in der die Hauptachsen in demselben Zeitmomente sich befinden, ohne Zweideutigkeit zu bestimmen.

Der Winkel ψ werde z. B. von der Parallelen Gx^0 aus in der Richtung zunächst gegen die Verlängerung der Parallelen Gy^0 auf deren negativer Seite, oder (indem man sich das Gesicht von G nach x^0 gekehrt denkt) von der linken gegen die rechte Seite, der Winkel φ von GL aus zunächst nach der obern Seite der Horizontalebene x^0Gy^0 gerechnet, und der Winkel θ dem Flächenwinkel, den die ebenen Winkel ψ und φ mit einander einschließen, gleich angenommen.

Sind nun die Winkel ψ, φ, θ gegeben, so trage man, um die Lage der Achsen $Gx_,$, $Gy_,$, $Gz_,$ zu finden, zuerst den Winkel ψ in der Ebene x^0Gy^0 von Gx^0 aus nach der rechten Seite, wodurch die Lage der Geraden GL bestimmt wird, dann den Winkel φ in derselben Ebene von GL aus nach der entgegengesetzten Richtung auf, und drehe den ebenen Winkel φ um den Schenkel GL so weit nach oben, bis der Flächenwinkel, den die beiden Winkel ψ und φ mit einander bilden, dem Winkel θ gleich ist. Der andere Schenkel des Winkels φ in dieser Lage der geneigten Ebene ist die Halbachse $Gx_,$; für die Halbachse $Gz_,$ ist derjenige Theil der Normalen auf der letzteren Ebene, welcher mit der Parallelen Gz^0 den Winkel θ bildet, zu nehmen, und zur Halbachse $Gy_,$ kann derjenige Theil der auf der $Gx_,$ senkrechten Geraden in derselben Ebene genommen werden, welcher mit der GL den Winkel $\varphi + 90^\circ$ macht.

Die Winkel ψ und φ können in positiver und negativer Richtung bis zu unbestimmter Größe wachsen, der Winkel θ dagegen ist nur positiv, und kann sich nur von 0 bis 180° erstrecken.

Durch die für den Anfang oder irgend einen andern Zeitpunkt der Bewegung gegebenen Werthe der Winkel ψ, φ und θ wird auf solche Art für die ganze Dauer der Bewegung bestimmt, welchen der beiden Theile des Durchschnitts der Ebenen x^0Gy^0 und $x_,Gy_,$ den Schenkel Gx des Winkels ψ, welchen der im Schwerpunkt zusammentreffenden vier Theile der als die Achsen der $x_,$ und $y_,$ gedachten Hauptachsen den Schenkel $Gx_,$ des Winkels φ, und welchen der beiden Theile der auf diesen Achsen senkrechten dritten Hauptachse den Schenkel $Gz_,$ des Winkels θ bildet, und sind die hiernach bestimmten Theile der Hauptachsen bleibend als die (positiven) Halbachsen $Gx_,$, $Gy_,$, $Gz_,$ zu betrachten (§5).

Vermöge dieser Voraussetzungen findet man (*)

$$\alpha = \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi,$$
$$\beta = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi,$$
$$\gamma = -\sin\theta \sin\psi,$$
$$\alpha' = \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi,$$
$$\beta' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi,$$
$$\gamma' = -\sin\theta \cos\psi,$$
$$\alpha'' = \sin\theta \sin\varphi,$$
$$\beta'' = \sin\theta \cos\varphi,$$
$$\gamma'' = \cos\theta.$$

Aus den letzteren Ausdrücken ergibt sich ferner

$$p = -\sin\theta \sin\varphi \frac{\partial\psi}{\partial t} + \cos\varphi \frac{\partial\theta}{\partial t},$$
$$q = -\sin\theta \cos\varphi \frac{\partial\psi}{\partial t} - \sin\varphi \frac{\partial\theta}{\partial t},$$
$$r = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \cos\theta \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

(*) P. Rech. p. 56 & 141. Méc. I. no. 375 & 410. Der Unterschied in diesen Ausdrücken, wie beide Werke sie geben, bezieht sich auf das Zeichen von θ, und rührt daher, daß die Achse Oz' in Rech. die Richtung von unten nach oben, in Méc. von oben nach unten hat; die Ausdrücke in jedem dieser Werke gehen daher in jene des andern über, wenn man $-\theta$ statt θ setzt.

Die zwölf willkührlichen Constanten endlich, welche bei der Integration der sechs Gleichungen (A) und (B) eingehen, erhalten ihre Bestimmung durch die als bekannt vorauszusetzenden Werthe, welche die Größen x°, y°, z°, ψ, φ, θ, $\frac{dx^\circ}{dt}$, $\frac{dy^\circ}{dt}$, $\frac{dz^\circ}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ im Anfange der Bewegung haben.

§14.

Betrachtet man die in den §§ 11 u. 12 für $\int_{,} V' \cos\lambda\, d\omega$, $\int_{,} (z_{,} \cos\mu_{,} - y_{,} \cos\nu_{,}) V' d\omega$ erhaltenen Ausdrücke etwas genauer, so bietet sich von selbst der nahe Zusammenhang dar, in welchem sie mit der Bewegung des Mittelpunkts der Kugel stehen. Es ist nämlich nicht nur f die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts, sondern es sind auch

$$hf + \alpha(q\varepsilon - r\delta) + \beta(r\kappa - p\varepsilon) + \gamma(p\delta - q\kappa),$$
$$h'f + \alpha'(q\varepsilon - r\delta) + \beta'(r\kappa - p\varepsilon) + \gamma'(p\delta - q\kappa),$$
$$h''f + \alpha''(q\varepsilon - r\delta) + \beta''(r\kappa - p\varepsilon) + \gamma''(p\delta - q\kappa),$$

die den Achsen der x°, y°, z° parallelen Theile, so wie

$$\rho f + q\varepsilon - r\delta, \qquad \sigma f + r\kappa - p\varepsilon, \qquad \tau f + p\delta - q\kappa$$

(§10) die den Hauptachsen Gx, Gy, Gz parallelen Theile dieser Totalgeschwindigkeit.

Man erkennt aus diesen Ergebnissen der Rechnung leicht, daß sich für die Vereinfachung und Erleichterung der weiteren Rechnung nicht unwesentliche Vortheile daraus erwarten lassen, wenn man statt des Schwerpunkts den Mittelpunkt der Kugel als denjenigen Punkt einführt, um welchen das Geschoß rotirt, und dessen Geschwindigkeit in jedem Augenblicke der Bewegung die fortschreitende Geschwindigkeit des Geschoßes vorstellt.

Man kann nämlich die Geschwindigkeit eines jeden Punktes m des Geschoßes in jedem Augenblicke als aus zwei anderen Geschwindigkeiten, wovon die eine der Totalgeschwindigkeit irgend eines Punktes n des Geschoßes gleich und parallel, die andere dem Punkte m eigenthümlich ist, zusammengesetzt sich denken. Vermöge der ersteren Geschwindigkeit bewegt sich das Geschoß mit einer allen seinen Theilen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit im Raume fort, wie wenn keine Umdrehung Statt fände; vermöge der anderen, jedem Punkte eigenthümlichen, Geschwindigkeit rotirt dasselbe um den Punkt n,

wie um einen festen Punkt. Da nun für den letzteren Punkt jeder Punkt des Geschosses ohne Unterschied gewählt werden kann, so liegt es auch in der Willkühr, irgend einen beliebigen Punkt des Geschosses, also auch den Mittelpunkt, als den Umdrehungspunkt zu betrachten und in die Rechnung aufzunehmen, ohne daß die Wahl desselben auf das Gesammtergebniß der Rechnung einen Einfluß haben kann (*).

Bezeichnet wie früher f die Geschwindigkeit des als Umdrehungspunkt betrachteten Schwerpunkts, sind somit ρf, σf, τf die den Achsen Gx, Gy, Gz parallelen Theile dieser Geschwindigkeit, und bedeuten p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten der Umdrehung des Geschosses um diese Achsen, für irgend einen Augenblick der Bewegung, so sind (37)

$$qz_1 - ry_1, \qquad rx_1 - pz_1, \qquad py_1 - qx_1,$$

die denselben Achsen parallelen Theile der linearen Umdrehungsgeschwindigkeit irgend eines Punktes m des Geschosses, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind, und

$$\rho f + qz_1 - ry_1, \qquad \sigma f + rx_1 - pz_1, \qquad \tau f + py_1 - qx_1,$$

die eben diesen Achsen parallelen Theile seiner Totalgeschwindigkeit. Nimmt man jetzt den Mittelpunkt als Umdrehungspunkt, so hat man die Bewegung des Körpers, wie eben bemerkt, so anzusehen, als hätte jeder Punkt eine Geschwindigkeit jener des Mittelpunkts gleich und parallel, und eine andere, womit er sich um denselben dreht. Die den Achsen der x_1, y_1, z_1 parallelen Theile der letzteren Geschwindigkeit sind aber für den Punkt m beziehungsweise gleich

$$\left.\begin{array}{l} \rho f + qz_1 - ry_1 - (\rho f + q\varepsilon - r\delta) \text{ oder } q(z_1 - \varepsilon) - r(y_1 - \delta), \\ \text{und } r(x_1 - \varkappa) - p(z_1 - \varepsilon), \\ p(y_1 - \delta) - q(x_1 - \varkappa); \end{array}\right\} \quad (1)$$

und, wenn man die durch den Mittelpunkt F gehenden Parallelen Fx_1, Fy_1, Fz_1 als Coordinaten-Achsen annimmt, so sind die Werthe der auf diese Achsen bezüglichen Coordinaten des Punktes m gleich $x_1 - \varkappa$, $y_1 - \delta$, $z_1 - \varepsilon$; daher, indem man ferner die Winkelgeschwindigkeiten der Umdrehung des

(*) P. Méc. II. no. 433. . . .

Geschosses um eben diese Achsen mit p', q', r' bezeichnet, die denselben parallelen Theile der linearen Umdrehungsgeschwindigkeit des Punktes ungleich

$$q'(z_1-\varepsilon)-r'(y_1-\delta),\qquad r'(x_1-\alpha)-p'(z_1-\varepsilon),\qquad p'(y_1-\delta)-q'(x_1-\alpha). \qquad (2)$$

Da die Theilgeschwindigkeiten (1) den letzteren (2) gleich seyn müssen, und zwar für alle Werthe, welche x_1, y_1, z_1 bekommen können, so muss nothwendig auch $p'=p$, $q'=q$, $r'=r$ seyn, und es ergibt sich hieraus, dass *die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen das Geschoss um die den Hauptachsen Gx, Gy, Gz parallel durch den Mittelpunkt* (oder, da der Beweis eben so für jeden Punkt des Geschosses gilt, *durch irgend einen Punkt*) *gehenden Achsen sich dreht, wenn man diesen Punkt als Umdrehungspunkt annimmt, ganz dieselben sind, wie die Winkelgeschwindigkeiten der Umdrehung um den Schwerpunkt*; welche Eigenschaft überhaupt aus den Gesetzen der relativen Bewegung folgt und für jeden frei rotirenden Körper, unabhängig von der Gestalt desselben, gilt.

In den Gleichungen (B) können demnach p, q, r eben so gut für die auf den Mittelpunkt als für die auf den Schwerpunkt als Umdrehungspunkt Bezug habenden Winkelgeschwindigkeiten gelten; die Grössen A, B, C in diesen Gleichungen dagegen bedeuten die mit g multiplicirten Drehungs-Momente um die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachsen, und die den letzteren parallel durch den Mittelpunkt gelegten Achsen werden im Allgemeinen keine Hauptachsen seyn, was indessen die Richtigkeit und Anwendbarkeit der so betrachteten Gleichungen nicht beeinträchtigt.

Aus den Drehungs-Momenten $\frac{A}{g}$, $\frac{B}{g}$, $\frac{C}{g}$ und den Coordinaten des Mittelpunktes α, δ, ε ließen sich zwar die Drehungs-Momente um die Parallelen Fx, Fy, Fz berechnen, oder man könnte auch die Hauptachsen des Mittelpunktes und die darauf sich beziehenden Winkelgeschwindigkeiten und Drehungs-Momente selbst bestimmen und in die Gleichungen einführen; damit wäre jedoch für den Calcul nichts gewonnen (§18).

§15.

Werden nunmehr mit x, y, z die den Achsen Ox, Oy, Oz zugehörigen

Coordinaten irgend eines Punktes der Bahn, welche der Mittelpunkt der Kugel beschreibt, und mit s der durch denselben Punkt begränzte Bogen dieser Bahn bezeichnet, während x°, y°, z°, s° in analoger Bedeutung sich fortwährend auf den Schwerpunkt beziehen, so hat man

die der Zeit t entsprechende Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts oder

$$F = \frac{\partial s}{\partial t},$$

die den Achsen der x°, y°, z° parallelen Theile derselben, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x^\circ}{\partial t} + \alpha(q\varepsilon - r\delta) + \beta(r\kappa - p\varepsilon) + \gamma(p\delta - q\kappa) &= \frac{\partial x}{\partial t},\\
\frac{\partial y^\circ}{\partial t} + \alpha'(q\varepsilon - r\delta) + \beta'(r\kappa - p\varepsilon) + \gamma'(p\delta - q\kappa) &= \frac{\partial y}{\partial t},\\
\frac{\partial z^\circ}{\partial t} + \alpha''(q\varepsilon - r\delta) + \beta''(r\kappa - p\varepsilon) + \gamma''(p\delta - q\kappa) &= \frac{\partial z}{\partial t},
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

die den Hauptachsen Gx, Gy, Gz parallelen Theile derselben Geschwindigkeit, oder

$$\begin{aligned}
\rho F + q\varepsilon - r\delta &= \frac{\partial s}{\partial t}\cos x, \quad Fa' = \alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial t},\\
\sigma F + r\kappa - p\varepsilon &= \frac{\partial s}{\partial t}\cos y, \quad Fa' = \beta\frac{\partial x}{\partial t} + \beta'\frac{\partial y}{\partial t} + \beta''\frac{\partial z}{\partial t},\\
\tau F + p\delta - q\kappa &= \frac{\partial s}{\partial t}\cos z, \quad Fa' = \gamma\frac{\partial x}{\partial t} + \gamma'\frac{\partial y}{\partial t} + \gamma''\frac{\partial z}{\partial t},
\end{aligned}$$

und die Gleichungen (A) und (B) nehmen hiernach folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial t^2} &= -\frac{2nD\pi l^2}{(i+2)M}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},\\
\frac{\partial^2 y^\circ}{\partial t^2} &= -\frac{2nD\pi l^2}{(i+2)M}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},\\
\frac{\partial^2 z^\circ}{\partial t^2} &= -g - \frac{2nD\pi l^2}{(i+2)M}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial p}{\partial t} + (C-B)rq &= \frac{2nD\pi l^2}{i+2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left[\varepsilon\left(\beta\frac{\partial x}{\partial t} + \beta'\frac{\partial y}{\partial t} + \beta''\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \delta\left(\gamma\frac{\partial x}{\partial t} + \gamma'\frac{\partial y}{\partial t} + \gamma''\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right],\\
B\frac{\partial q}{\partial t} + (A-C)pr &= \frac{2nD\pi l^2}{i+2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left[\kappa\left(\gamma\frac{\partial x}{\partial t} + \gamma'\frac{\partial y}{\partial t} + \gamma''\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \varepsilon\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right],\\
C\frac{\partial r}{\partial t} + (B-A)qp &= \frac{2nD\pi l^2}{i+2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left[\delta\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \kappa\left(\beta\frac{\partial x}{\partial t} + \beta'\frac{\partial y}{\partial t} + \beta''\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \ldots (B_1)$$

In diesen Gleichungen ist $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i}\cos x^\circ Fa'$, $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i}\cos y^\circ Fa'$, $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i}\cos z^\circ Fa'$, so wie $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i}\cos x, Fa'$, u. s. w. und die Gestalt derselben, ohne Zweifel die einfachste, welche sich ihnen geben läßt, zeigt, daß das Geschoß mit sphärischer Oberfläche, der Mittelpunkt mag mit dem Schwerpunkt zusammenfallen oder nicht, sich ganz ebenso bewegt, wie wenn der gesammte

auf dasselbe wirkende normale Widerstand des flüssigen Mittels, welcher sich durch $\frac{nD}{g}\cdot\frac{2\pi l^2}{i+2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^i$ ausdrücken läßt, am Mittelpunkt angebracht und der Bewegung dieses Punktes entgegen gerichtet wäre.

Daß dieses Gesetz Statt findet, war zwar vermöge der Eigenschaften der sphärischen Oberfläche von vorn herein ersichtlich; es schien jedoch angemessen, den Beweis davon in ganzer Strenge zu geben, und den Ausdruck für die Größe des Gesamtwiderstandes gegen die Kugel auf dem directesten Wege abzuleiten.

Um die Coordinaten der Bahn des Schwerpunkts gänzlich aus den Gleichungen (A_1) zu entfernen, hat man in jedem Zeitpunkt der Bewegung, wenn man Umdrehung um den Schwerpunkt oder den Mittelpunkt annehmen,

$$\left.\begin{aligned} x &= x^\circ + \alpha\varkappa + \beta\delta + \gamma\varepsilon, \\ y &= y^\circ + \alpha'\varkappa + \beta'\delta + \gamma'\varepsilon, \\ z &= z^\circ + \alpha''\varkappa + \beta''\delta + \gamma''\varepsilon, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (4)$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^\circ}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \varkappa\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - \delta\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 y^\circ}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \varkappa\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} - \delta\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 z^\circ}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varkappa\frac{\partial^2\alpha''}{\partial t^2} - \delta\frac{\partial^2\beta''}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^2\gamma''}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (5)$$

welche Werthe anstatt $\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y^\circ}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z^\circ}{\partial t^2}$ in die Gleichungen (A_1) zu setzen wären.

Weil $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \beta r - \gamma q$, $\frac{\partial\beta}{\partial t} = \gamma p - \alpha r$, $\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \alpha q - \beta p$, u. s. w. ist (*), so könnte man die Differentiale der Größen α, β, γ, etc. herausschaffen, indem z. B.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} &= r(\gamma p - \alpha r) - q(\alpha q - \beta p) + \beta\frac{\partial r}{\partial t} - \gamma\frac{\partial q}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} &= p(\alpha q - \beta p) - r(\beta r - \gamma q) + \gamma\frac{\partial p}{\partial t} - \alpha\frac{\partial r}{\partial t}, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)$$

sich ergibt; es wird jedoch vortheilhafter seyn, jene Werthe für $\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y^\circ}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z^\circ}{\partial t^2}$, wie sie hier gegeben sind, in den Gleichungen beizubehalten.

Die im §13 für $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots p, q, r$ angegebenen Ausdrücke bleiben bei der bevorstehenden Umformung der Gleichungen (A) und (B) ungeändert, da es bei der Construction dieser Ausdrücke gleichgültig ist, ob die Winkel, welche dabei in Betracht kommen, ihren gemeinschaftlichen Scheitel im

(*) P. Méc. II. nº 411.

Mittelpunkt F oder im Schwerpunkt G haben, und auch die Werthe von p, q, r von der Wahl des Untersuchungspunktes unabhängig sind (§14).

Durch die Anfangswerthe der Grössen x°, y°, z°, $\frac{dx^\circ}{dt}$, $\frac{dy^\circ}{dt}$, $\frac{dz^\circ}{dt}$ sind vermöge der Gleichungen (3) und (4) auch jene der Grössen x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, oder umgekehrt, gegeben.

Noch mag in Betreff der Gleichungen (A.) und (B.) bemerkt werden, dass in jeder derselben der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens grösserer Allgemeinheit wegen auch als ein Aggregat von Ausdrücken derselben Form, in deren jedem die Grössen i und n andere Werthe haben, je nachdem die Beschaffenheit des Widerstandsgesetzes dieses fordert, wenn der Ausdruck für den normalen Widerstand (§1) selbst aus mehreren Gliedern wie $\frac{nDbv^i}{g}$ besteht, gedacht werden kann.

§16.

Nach bewerkstelligter Ableitung der Differential-Gleichungen der doppelten Bewegung, welche der Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen ist, lässt sich nun leicht übersehen, dass man auch auf weit einfacherem Wege zu diesen Gleichungen gelangen kann.

Stellt man sich nämlich vor, die Totalgeschwindigkeit eines jeden Punktes der Oberfläche der Kugel in irgend einem Augenblicke der Bewegung sey (§14) in zwei Geschwindigkeiten zerlegt, deren eine der Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts gleich und parallel, die andere ihr eigenthümlich ist, so ist klar, dass die letztere Geschwindigkeit, vermöge welcher die Kugel um ihren Mittelpunkt sich dreht, weil ihre Richtung eine Berührende der Oberfläche ist, keinen Einfluss auf den (hier allein in Betracht kommenden) normalen Widerstand haben kann, den das flüssige Mittel der Bewegung des Geschosses entgegensetzt. Dieser Widerstand hängt daher, ganz eben so, wie wenn keine Rotation Statt hätte, in jedem Augenblicke allein von der Richtung und Grösse der Geschwindigkeit, womit der Mittelpunkt sich bewegt, ab.

Es sey, nach den bisherigen Bezeichnungen, in irgend einem Punkte der Bahn, welche der Mittelpunkt beschreibt, Fa' diese Richtung oder die Berührende der

daher, $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Mittelpunkts. Man betrachte den im Durchschnitt der Kugel mit der Ebene $a'Fb'$ zwischen den Halbmessern Fa' und Fb' liegenden Kreisquadranten als die erzeugende Linie der Oberfläche der vorderen Halbkugel, und setze den Winkel $a'Fm$, den der Halbmesser Fm an dem den Coordinaten b' und a' entsprechenden Punkt m dieses Quadranten mit der Achse Fa' bildet, gleich ξ, so wie das Element des Kreisbogens an diesem Punkt gleich dm.

Von der mit der Achse Fa' parallelen Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ des Punktes m fällt bei deren Zerlegung nach der Normalen und der Berührenden an diesem Punkte auf die Normale ein Theil $= \frac{ds}{dt}\cos\xi$, und der Widerstand gegen das Element dm ist daher $(\delta 1) = \frac{nD}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^i \cos^i\xi \,.\, dm$. Bei der Erzeugung der Oberfläche der Halbkugel durch den von den Halbmessern Fa' und Fb' eingeschlossenen Kreisquadranten beschreibt das Element dm eine Zone, deren Flächeninhalt $= 2\pi b' dm$, und in deren ganzem Umfange der Winkel des Halbmessers mit der Achse Fa' gleich ξ ist. Zerlegt man den Widerstand gegen jedes Element dieser Zone wieder nach zwei Richtungen, wovon die eine parallel mit Fa', die andere darauf senkrecht ist, so heben sich die auf Fa' senkrechten Theile des Widerstandes gegenseitig auf, und der mit Fa' gleichlaufende Theil des Widerstandes gegen die Zone ist $= \frac{2nD\pi}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^i \cos^{i+1}\xi \,.\, b'dm$. Nun hat man

$$b' = l\sin\xi, \qquad dm = l\,d\xi,$$

daher den Widerstand gegen die Zone $= \frac{2nD\pi l^2}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^i \cos^{i+1}\xi \sin\xi\, d\xi$, und wenn der Widerstand gegen die Kugel, welcher sich nur auf die vordere Halbkugel erstreckt, mit R bezeichnet wird,

$$R = \frac{2nD\pi l^2}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^i \int\limits_{\frac{1}{2}\pi - 0} \cos^{i+1}\xi \sin\xi\, d\xi = \frac{nD}{g}\,\frac{2\pi l^2}{i+2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^i,$$ wie oben (§ 15),

indem das Integral von $\xi = 0$ bis $\xi = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Die Richtung dieses Widerstandes liegt, weil er um die Achse Fa' ganz gleich vertheilt ist, offenbar in dieser Achse, und geht von a' nach F. Wird derselbe nach den drei Parallelen Fx°, Fy°, Fz° zerlegt, so ergeben sich die drei Gleichungen für die fortschreitende Bewegung:

$$\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial t^2} = -\frac{gR}{M}\cos x^\circ Fa', \quad \frac{\partial^2 y^\circ}{\partial t^2} = -\frac{gR}{M}\cos y^\circ Fa', \quad \frac{\partial^2 z^\circ}{\partial t^2} = -g - \frac{gR}{M}\cos z^\circ Fa',$$

welche mit den Gleichungen ($A_,$) übereinstimmen (§15).

Und nimt man, was willkührlich ist, Umdrehung um den Schwerpunkt an, und zerlegt die bewegende Kraft R nach den durch den Mittelpunkt der Hauptaxen des Schwerpunkts parallel gehenden Richtungen $Fx_,$, $Fy_,$, $Fz_,$, so erhält man die drei Gleichungen für die Umdrehungs-bewegung (*):

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = gR(\varepsilon\cos y_, Fa' - \delta\cos z_, Fa'),$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = gR(\varkappa\cos z_, Fa' - \varepsilon\cos x_, Fa'),$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = gR(\delta\cos x_, Fa' - \varkappa\cos y_, Fa'),$$

welche mit den Gleichungen ($B_,$) gleichbedeutend sind.

§ 17.

Will man dagegen bei der Umdrehung um den Mittelpunkt beharren, so hat man, da die durch diesen Punkt gehenden Parallelen $Fx_,$, $Fy_,$, $Fz_,$, auf welche die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r sich beziehen, im Allgemeinen keine Hauptaxen sind, auf die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int[(Y_, - q_,)x_, - (X_, - p_,)y_,]\,dm &= 0,\\ \int[(X_, - p_,)z_, - (Z_, - r_,)x_,]\,dm &= 0,\\ \int[(Z_, - r_,)y_, - (Y_, - q_,)z_,]\,dm &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (C)$$

in P. Méc. II. no 412 zurückgehend, diese an der Stelle der eben daselbst gegebenen Gleichungen (a) anzuwenden.

In diesen Gleichungen (C) stellen, für den der Zeit t entsprechenden Augenblick der Bewegung, $x_,$, $y_,$, $z_,$ die auf drei beliebige vom Umdrehungspunkt ausgehende, unter sich rechtwinkelige Axen, wofür hier die Parallelen $Fx_,$, $Fy_,$, $Fz_,$ genommen werden können, bezogenen Coordinaten irgend eines Elements dm des rotirenden Körpers, und $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ die diesen Axen parallelen Theile der auf das Element dm wirkenden beschleunigenden Kräfte vor, während die Producte der Größen $p_,$, $q_,$, $r_,$ mit dt, für welche die in P. Méc. II. no 408 gegebenen Ausdrücke zu setzen sind, die wirklichen diesem Zeitelement zugehörigen Zunahmen der denselben Axen parallelen linearen Umdrehungsgeschwindigkeiten

(*) P. Méc. II. no 412.

des Elementes dm bedeuten, und sind die mit $\int$ bezeichneten Integrale auf die ganze Masse des Körpers zu erstrecken.

Wird die Totalgeschwindigkeit irgend eines Elementes der Oberfläche des Geschosses nach dem vorigen § in zwei Geschwindigkeiten, deren eine der Totalgeschwindigkeit des Mittelpunktes gleich und parallel, die andere dem Elemente eigenthümlich ist, zerlegt, so sind in Bezug auf die letztere Geschwindigkeit, da die dadurch entstehende Umdrehungsbewegung um den Mittelpunkt keinen normalen Widerstand erzeugt, die Theilkräfte X, Y, Z gleich Null; und eben so sind auch die die gesammte Oberfläche umfassenden Summen der Momente der Theile X, Y, Z, des auf die erstere Theilgeschwindigkeit Bezug habenden Widerstandes, weil dessen mittlere Richtung durch den Mittelpunkt geht, gleich Null.

Dagegen hat man nach den Grundsätzen der Mechanik (P. Méc. II. no 436 u. 438, &c.), damit der Umdrehungspunkt bei der Bewegung des Geschosses als fest oder ruhend gedacht werden kann, an jedem Elemente der Masse desselben in jedem Augenblicke eine beschleunigende Kraft, welche ihm eine der des Umdrehungspunktes gleiche und parallele, aber der Richtung nach entgegengesetzte Geschwindigkeitszunahme mittheilt, angebracht anzunehmen. Die den Achsen Ox', Oy', Oz' parallelen Theile dieser beschleunigenden Kraft sind, indem der Mittelpunkt als Umdrehungspunkt angenommen wird, (§15) $-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, -\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, daher die den Achsen Fx, Fy, Fz parallelen Theile derselben Kraft beziehungsweise

$$-\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \alpha'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \alpha''\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$
$$-\beta\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \beta'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \beta''\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$
$$-\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \gamma'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \gamma''\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

und da die diesen beschleunigenden Kräften entsprechenden bewegenden Kräfte den Massen der Elemente proportional sind, so drücken die Producte eben dieser Theilkräfte mit $\frac{M}{g}$, der Masse des Körpers, die Summen der den Achsen Fx, Fy, Fz parallelen bewegenden Kräfte in der ganzen Ausdehnung des Körpers aus, und geht die mittlere Richtung der letzteren Kräfte durch

den Schwerpunkt des Körpers. Zu eben diesen Kräften kommt dann noch die der Schwere des Körpers im flüssigen Mittel entsprechende bewegende Kraft $-\frac{M}{g}g'$, deren Richtung ebenfalls durch den Schwerpunkt geht, und deren denselben Achsen parallele Theile $-\alpha''\frac{M}{g}g'$, $-\beta''\frac{M}{g}g'$ und $-\gamma''\frac{M}{g}g'$ sind. Man hat daher, weil $-\varkappa, -\delta, -\varepsilon$ die auf die Parallelen $Fx_,$, $Fy_,$, $Fz_,$ als Achsen bezogenen Coordinaten des Schwerpunkts sind, in den Gleichungen (6)

$$\int X_, y_, dm = \frac{M}{g}\delta\left(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha''\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g'\right)\right),$$

$$\int Y_, x_, dm = \frac{M}{g}\varkappa\left(\beta\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta''\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g'\right)\right),$$

u. s. w.

zu setzen, und diese Ausdrücke verwandeln sich ferner vermittelst der von der Wahl des Umdrehungspunktes unabhängigen Gleichungen (5) und (6) des §15, oder, was auf eins hinauskommt, auch durch Anwendung der aus den Gleichungen (3) für $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ sich ergebenden Werthe in

$$\int X_, y_, dm = \frac{M}{g}\delta\left(\alpha\frac{\partial^2 x^0}{\partial t^2} + \alpha'\frac{\partial^2 y^0}{\partial t^2} + \alpha''\left(\frac{\partial^2 z^0}{\partial t^2} + g'\right) + \varepsilon\frac{\partial q}{\partial t} - \delta\frac{\partial r}{\partial t} + q(p\delta - q\varkappa) + r(p\varepsilon - r\varkappa)\right),$$

$$\int Y_, x_, dm = \frac{M}{g}\varkappa\left(\beta\frac{\partial^2 x^0}{\partial t^2} + \beta'\frac{\partial^2 y^0}{\partial t^2} + \beta''\left(\frac{\partial^2 z^0}{\partial t^2} + g'\right) + \varkappa\frac{\partial r}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial p}{\partial t} + r(q\varepsilon - r\delta) + p(q\varkappa - p\delta)\right),$$

u. s. w.

Was die Größen p, q, r betrifft, so hat man in den Ausdrücken für dieselben (P. Méc. II. no 408), sowie in den Gleichungen (6), wenn die Coordinaten $x_,$, $y_,$, $z_,$, welche sich in diesen Ausdrücken und Gleichungen auf den Umdrehungspunkt als Anfangspunkt beziehen, hier wie bisher als vom Schwerpunkt anfangend genommen werden sollen, $x_, - \varkappa$, $y_, - \delta$, $z_, - \varepsilon$ statt $x_,$, $y_,$, $z_,$ zu setzen, wogegen die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r, die Achsen, worauf sie sich beziehen, mögen ihren Ursprung im Mittelpunkt oder im Schwerpunkt haben, wie im §14 gezeigt ist, gleiche Werthe behalten; und findet auf solche Art

$$\int p_, y_, dm \text{ in } (6) = \int (y_, - \delta)\,dm\left[(z_, - \varepsilon)\frac{\partial q}{\partial t} - (y_, - \delta)\frac{\partial r}{\partial t} + q\left(p(y_, - \delta) - q(x_, - \varkappa)\right) + r\left(p(z_, - \varepsilon) - r(x_, - \varkappa)\right)\right],$$

$$= \frac{M}{g}\delta\left(\varepsilon\frac{\partial q}{\partial t} - \delta\frac{\partial r}{\partial t} + q(p\delta - q\varkappa) + r(p\varepsilon - r\varkappa)\right) + \left(pq - \frac{\partial r}{\partial t}\right)\int y_,^2\,dm,$$

$$\int q_, x_, dm = \frac{M}{g}\varkappa\left(\varkappa\frac{\partial r}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial p}{\partial t} + r(q\varepsilon - r\delta) + p(q\varkappa - p\delta)\right) + \left(pq + \frac{\partial r}{\partial t}\right)\int x_,^2\,dm,$$

u. s. w.

Werden nun weiter aus $\int X_{,} y_{,}\, dm$ und $\int Y_{,} x_{,}\, dm$ die Größen $\frac{d^2x^{\circ}}{dt^2}, \frac{d^2y^{\circ}}{dt^2}, \frac{d^2z^{\circ}}{dt^2}$ mittelst der Gleichungen ($A_{,}$) eliminirt, und wird beachtet, daß in den Gleichungen ($B_{,}$) der Factor $C_{,}$ gleich $g . \int (x_{,}^2 + y_{,}^2)\, dm$ und $B_{,} - A_{,} = g . \int (x_{,}^2 - y_{,}^2)\, dm$ ist, so ergibt sich, daß die erste der Gleichungen (C) in die dritte der Gleichungen ($B_{,}$) übergeht, woraus dann unmittelbar folgt, daß aber so die zweite und dritte der Gleichungen (C) die zweite und erste der Gleichungen ($B_{,}$) geben.

Aus allen diesen Untersuchungen erhellet aber offenbar, daß, man mag den Operationen der Rechnung die Voraussetzung der Umdrehung um den Schwerpunkt oder um den Mittelpunkt zum Grunde legen, für die Umdrehungsbewegung des Geschosses aus ihnen immer die Gleichungen ($B_{,}$) als Endresultat hervorgehen, und daß diese Gleichungen somit unter beiden Voraussetzungen gültig sind.

§ 18.

Will man endlich die Umdrehung des Geschosses auf die durch den Mittelpunkt gehenden drei Hauptachsen, anstatt auf die Hauptachsen Gx, Gy, Gz, oder auf die ihnen parallelen Achsen Fx, Fy, Fz, beziehen, so erhält man, wenn $\varkappa_{,}, \delta_{,}, \varepsilon_{,}$ die jenen Hauptachsen zugehörigen Coordinaten des Schwerpunkts sind, und wenn $A_{,}, B_{,}, C_{,}, p_{,}, q_{,}, r_{,}, \alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$ etc. dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Hauptachsen des Mittelpunkts, wie $A, B, C, p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ etc. in Bezug auf die Hauptachsen des Schwerpunkts haben, indem man die Gleichungen (a) in P. Méc. II. №. 412 und übrigens dieselben Grundsätze der Mechanik, wie im vorigen §, zur Anwendung bringt, für die Umdrehungsbewegung des Geschosses die drei Gleichungen:

$$A_{,} \frac{dp_{,}}{dt} + (C_{,} - B_{,})\, q_{,} r_{,} = M(\varepsilon_{,} Y_{,} - \delta_{,} Z_{,}),$$

$$B_{,} \frac{dq_{,}}{dt} + (A_{,} - C_{,})\, r_{,} p_{,} = M(\varkappa_{,} Z_{,} - \varepsilon_{,} X_{,}),$$

$$C_{,} \frac{dr_{,}}{dt} + (B_{,} - A_{,})\, p_{,} q_{,} = M(\delta_{,} X_{,} - \varkappa_{,} Y_{,}),$$

in welchen

$$X_{,} = \alpha_{,} \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_{,}' \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_{,}'' \left(\frac{d^2z}{dt^2} + g\right),$$

$$Y_{,} = \beta_{,} \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_{,}' \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_{,}'' \left(\frac{d^2z}{dt^2} + g\right),$$

$$Z_{,} = \gamma_{,} \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_{,}' \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_{,}'' \left(\frac{d^2z}{dt^2} + g\right)$$

ist, und die beschleunigenden Kräfte $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ wieder durch die Gleichungen (A,) in Verbindung mit den Gleichungen (5) und (6) des §15, wenn man in den letztern ebenfalls α,, β,, γ, etc. für α, β, γ etc. setzt, näher bestimmt werden.

Auch diese Gleichungen, welche mit den Gleichungen (B,) schon der Form nach übereinstimmen, müssen mit denselben ganz identisch werden, wenn man die in ihnen enthaltenen beständigen Größen A,, B,, C,, κ,, δ,, ε,, so wie die Größen p,, q,, r,, α,, β,, γ, etc. durch das zur Umwandlung der Coordinaten angewandte Verfahren auf die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachsen überträgt.

§19.

Die aus den bisherigen Untersuchungen gewonnenen Ergebnisse bieten zunächst zu folgenden Betrachtungen und Folgerungen Veranlassung:

I) Schon aus den Erörterungen des §14 folgt, daß, wenn ein frei im Raume sich bewegender Körper durch irgend eine Ursache zugleich eine rotirende Bewegung angenommen hat, durch die Natur dieser Bewegung kein bestimmter Punkt gegeben ist, den man eigens als denjenigen, um welchen die Umdrehung Statt findet, sich vorzustellen hätte, oder daß sich überhaupt kein Grund angeben läßt, irgend einen Punkt des Körpers, z. B. den Schwerpunkt, vorzugsweise vor den andern als den Rotationspunkt zu betrachten. Die Richtigkeit dieses Schlusses wird in dem hier besonders behandelten Falle eines in der Luft oder einem andern flüssigen Mittel sich bewegenden Geschosses mit sphärischer Oberfläche noch dadurch bestätiget, daß die Rechnung für die Rotationsbewegung ganz dieselben Gleichungen liefert, man mag den Schwerpunkt oder den Mittelpunkt des Geschosses als Umdrehungspunkt voraussetzen. Die Wahl dieses Punktes ist, so wie die Festsetzung des Anfangspunktes eines Coordinaten-Systems und der Richtungen der Coordinaten-Achsen, gänzlich Sache der Willkühr, und hat nur für die Operationen des Calculs Bedeutung, welche je nachdem mehr oder minder schicklichen Annahmen einfacher oder verwickelter werden. Der Schwerpunkt als Umdrehungspunkt genommen, gewährt gewöhnlich den Vortheil, daß er die Berechnung

der Drehungs-Momente erleichtert, die Gleichungen für die Rotations-Bewegung einfacher gibt, und nicht die Hinzufügung anderer Kräfte zu den die Umdrehung bewirkenden erfordert, um als fest oder ruhend betrachtet werden zu können. Im vorliegenden Falle verdient jedoch augenscheinlich der Mittelpunkt des Geschosses den Vorzug, weil er nicht nur bei Darstellung der Differential-Gleichungen für die Umdrehungs-Bewegung auf viel kürzerem Wege zum Ziele gelangen läßt, sondern auch diese Gleichungen einfacher und frei von den Wurzelzeichen, das sie, auf die Lage des Schwerpunkts bezogen, in sich aufnehmen, gibt.

Gleichfalls willkürlich können diejenigen drei rechtwinkligen Achsen genommen werden, nach welchen man der Vollständigkeit des Calculs wegen die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Elemente des Körpers zu zerlegen hat, und gewöhnlich werden zur Vereinfachung der Rechnung hiefür die Hauptachsen des Umdrehungspunktes gewählt.

Von diesen Achsen verschieden ist diejenige Achse des Körpers, um welche während eines Zeitelementes dt alle Theile des Körpers mit ihrer ganzen Umdrehungsgeschwindigkeit sich bewegen, oder der Körper wie um eine feste Achse sich dreht, und welche, während eines Augenblicks der Bewegung sich selbst parallel bleibend, im Allgemeinen von einem Augenblicke zum andern ihre Lage im Innern des Körpers ändert, und daher die <u>augenblickliche Rotations-Achse</u> (axe instantané de rotation) genannt wird. Sind wie bisher p, q, r die den vom Umdrehungspunkt O ausgehenden Coordinaten-Achsen Ox_1, Oy_1, Oz_1 parallelen Theile der Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung eines Körper-Elementes, so ist die <u>ganze</u> Winkelgeschwindigkeit gleich der (als positiv gedachten) Wurzelgröße $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, und wenn OJ die Richtung bezeichnet, in welche die augenblickliche Rotations-Achse fällt, so hat man

$$\cos JOx_1 = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \cos JOy_1 = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \cos JOz_1 = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Ist demnach der Umdrehungspunkt festgesetzt, so ist durch die als bekannt angenommenen Werthe der Theilgeschwindigkeiten p, q, r mittelst dieser Gleichungen in jedem Augenblicke die Lage der augenblicklichen Umdrehungsachse im

Innern des Körpers bestimmt, und da die Werthe von p, q, r nach dem Vorigen ungeändert bleiben, wenn man statt des Punktes O einen andern Q als Umdrehungspunkt annimt, und jene Werthe auf die Parallelen Qx, Qy, Qz bezieht, so ist die dem Punkte Q zugehörige augenblickliche Umdrehungsachse jener des Punktes O parallel. Jeder Punkt des Körpers hat somit, als Umdrehungspunkt betrachtet, eine eigenthümliche augenblickliche Rotationsachse, aber alle diese Achsen sind in jedem Zeitpunkte der Bewegung unter sich parallel.

§ 20.

II) Ist die Masse des sphärischen Geschosses um dessen Mittelpunkt symmetrisch vertheilt, besteht z. B. dessen körperlicher Inhalt entweder ganz aus demselben gleichartigen Stoffe, oder aus mehreren in sich gleichartigen concentrischen Schichten, so fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammen, oder es ist $\alpha = \delta = \varepsilon = 0$, die Größen A, B, C, welche, mit g dividirt, die auf die Hauptachsen des Schwerpunkts bezogenen Drehungsmomente des Körpers vorstellen, sind unter sich gleich, und jeder Durchmesser des Geschosses ist eine Hauptachse.

In diesem Falle gehen die Gleichungen (B.) in

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0,$$

über, oder werden die Größen p, q, r constant. Das Geschoß behält die Umdrehungsgeschwindigkeit, mit welcher es das Geschützrohr verläßt, wenn ihm eine solche mitgetheilt wird, der Größe und Richtung nach unverändert bei, und der Widerstand der Luft äußert keinen Einfluß auf die Rotationsbewegung des Geschosses. Die augenblickliche Rotations-Achse bleibt während der ganzen Bewegung derselbe Durchmesser des Geschosses, welcher seine Lage auch gegen die festen Achsen Ox^0, Oy^0, Oz^0, oder im Raume, nicht ändert.

Die Gleichungen (A.) aber nehmen, weil x^0; y^0; z^0 gleich x, y, z werden, die Form der gewöhnlichen Gleichungen für die Flugbahn einer Kugel an, deren Schwerpunkt als mit dem Mittelpunkt zusammenfallend vorausgesetzt wird.

Die Gleichungen (A.) und (B.) werden gänzlich unabhängig von einander, oder jede der beiderlei Bewegungen des Körpers, die fortschreitende und die

rotirende, erfolgt aber so, wie wenn die andere gar nicht vorhanden wäre. *Durch die Rotation wird somit die Flugbahn des Geschosses nicht verändert.*

§ 121.

III) Wenn die Masse des Geschosses nicht symmetrisch um dessen Mittelpunkt vertheilt ist, so müssen die Werthe der drei Größen A, B, C im Allgemeinen unter sich verschieden seyn, der Mittelpunkt und Schwerpunkt werden aber dennoch zufällig zusammenfallen können, so daß $a = b = c = 0$ ist. In diesem Falle gilt von den Gleichungen (A,) wieder, was im vorigen § über sie insbesondere bemerkt ist; die Gleichungen (B,) aber gehen auf folgende einfachere Form zurück:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr &= 0, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp &= 0, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (C,)$$

Die Gleichungen (A,) und (C,) sind ebenfalls unabhängig von einander, da weder in den letzteren die Coordinaten x, y, z, noch in den ersteren die Größen $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ etc. enthalten sind. *Die Bahn des Schwerpunkts erleidet daher keine Veränderung durch die Rotation des Geschosses*, und die letztere Bewegung findet ganz eben so Statt, wie wenn der Schwerpunkt in Ruhe wäre. Der Widerstand der Luft hat keinen Einfluß auf die Umdrehungsbewegung des Geschosses, aber die Geschwindigkeiten p, q, r sind nicht mehr beständig, sondern Functionen der Zeit t.

Die Gleichungen (C,) sind ganz dieselben wie die Gleichungen für die Umdrehungsbewegung eines Körpers, dessen Schwerpunkt befestigt, und welcher, nachdem er durch einen ihm mitgetheilten Stoß in Bewegung gesetzt worden, sich selbst überlassen ist. Poisson hat sie in Méc. II. № 414 u. folg. näher untersucht und gezeigt, wie deren Integration zu bewerkstelligen ist. Da sie jedoch, sofern die Bewegung, zu deren Bestimmung sie dienen, ohne Einfluß auf die Bahn des Geschosses bleibt, für den Zweck der gegenwärtigen Abhandlung von nur untergeordneter Bedeutung sind, so wird es genügen, die Resultate der Auflösung des Problems, so merkwürdig sie an sich sind, nur im Wesentlichen hier anzuführen.

1) Das Haupt=Moment der Quantitäten der Bewegung (unter welcher hier allein die umdrehende, nicht aber die fortschreitende, Bewegung begriffen ist) aller Theile des Geschosses in Bezug auf den Schwerpunkt ist eine beständige (von der Zeit unabhängige) Größe, und die Achse dieses Hauptmomentes (*), welche hier mit Gm bezeichnet werde, behält ihre Lage im Raume oder gegen irgend drei rechtwinkelige feste Achsen während der Bewegung unverändert bei. Die Achse Gm und die auf ihr senkrechte durch den Schwerpunkt gehende Ebene ändern zwar bei der Drehung des Geschosses ihre Lage im Innern desselben oder gegen die beweglichen Achsen Gx, Gy, Gz; es lassen sich aber der Punkt, in welchem die Achse, und der größte Kreis, in welchem diese Ebene die Oberfläche des Geschosses schneiden, mittelst der Werthe von p, q, r, wenn sie bekannt sind, für jeden Augenblick bestimmen.

Eben dieses Haupt=Moment muß dem Momente des Stoßes, aus welchem man sich die Rotation im Anfange der Bewegung (durch Anschläge im Geschützrohr, durch Reibung an den Wänden der Seele, oder durch excentrische Richtung des Pulvergases auf das Geschoß) entstanden denken kann, gleich seyn, und die Achse Gm mit der auf der Schwerpunktsebene, in welcher die Richtung dieses Stoßes sich befindet, im Schwerpunkt senkrecht stehenden Geraden zusammenfallen, wodurch deren Lage bestimmt wird.

2) Die Summe der Producte der Massen aller Elemente des Geschosses in die Quadrate ihrer linearen Umdrehungsgeschwindigkeiten, oder die Summe der sogenannten lebendigen Kräfte, welche die Umdrehung erzeugt, ist gleichfalls eine von der Zeit unabhängige Größe; eben so die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung des Geschosses um die Achse Gm, und diese Geschwindigkeit gleich der durch das Moment des anfänglichen Stoßes in Bezug auf den Schwerpunkt dividirten Summe der oben erwähnten lebendigen Kräfte des Geschosses.

3) Die augenblickliche Rotationsachse bewegt sich indem sie jeden Augenblick

(*) Über den Begriff des Hauptmoments eines an einem festen Körper angebrachten Systems von Kräften und deren Achsen vergleiche man P. Méc. I. n° 282.

mit einem andern Durchmesser des Geschosses zusammenfällt, auf der Oberfläche eines Kegels zweiter Ordnung im Innern des Geschosses, und eben so bleibt die im Raume sich stets parallel sich fortbewegende Achse Gm bei der Drehung des Geschosses auf der Oberfläche eines andern solchen, im Innern desselben sich bildenden, Kegels.

4) Nimt die Rotations-Bewegung ihren Anfang um eine Hauptachse des Schwerpunkts, oder ist die Achse Gm im Anfange der Bewegung eine solche Hauptachse (*), so fallen die augenblickliche Rotationsachse und die Achse Gm während der ganzen Dauer der Bewegung mit dieser Hauptachse zusammen, oder findet die Umdrehung nur, und zwar mit beständiger Geschwindigkeit, um dieselbe Achse Statt. Diese Eigenschaft kommt allein den Durchmessern, welche Hauptachsen sind, zu.

5) Macht die augenblickliche Rotationsachse im Anfange der Bewegung einen sehr kleinen Winkel mit einer der Hauptachsen des Schwerpunkts, so bleibt sie auch während der folgenden Bewegung in geringer Entfernung von ihr, wenn diese Hauptachse dem größten oder kleinsten Drehungsmoment zugehört, oder die Bewegung um dieselbe Hauptachse ist stabil; sie entfernt sich dagegen mehr und mehr von jener Hauptachse und die Bewegung um dieselbe ist nicht stabil, wenn sie die Achse des mittleren Drehungsmoments ist.

6) Sind zwei Drehungsmomente einander gleich, z. B. $\frac{A}{g} = \frac{B}{g}$, so sind die Winkelgeschwindigkeiten der Umdrehung um die Achse Gz des dritten, $\frac{C}{g}$, und um die augenblickliche Rotationsachse beständig, und jene Achse beschreibt einen geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche um die Achse Gm.

Noch mag in Bezug auf die Fälle, wenn der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, die Bemerkung hier Platz finden, daß nur dieser Punkt

(*) Daß im ersten Augenblicke der Bewegung die augenblickliche Umdrehungsachse und die Achse Gm wirklich in dem Falle, aber auch nur dann, zusammentreffen, wenn in diesem Augenblicke die Achse Gm in die Richtung einer Hauptachse des Schwerpunkts fällt, erhellet insbesondere aus P. Méc. II. № 437.

als Umdrehungspunkt angenommen den Vortheil gewährt, daß die fortschreitende und die umdrehende Bewegung unabhängig von einander werden.

§ 22.

IV) Wenn der Mittelpunkt und der Schwerpunkt nicht zusammenfallen, so sind die Gleichungen (A,) für die fortschreitende Bewegung des Geschosses und die Gleichungen (B,) für die Rotations-Bewegung nicht mehr unabhängig von einander, indem jede dieser Gruppen von Gleichungen sowohl die Coordinaten der Bahn des Umdrehungspunktes, als auch die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r oder die von den letzteren abhängigen Größen α, β, γ, etc. in sich aufnimmt. <u>Die Flugbahn des Geschosses erleidet daher in diesem Falle eine Änderung durch die Rotation</u>, und die letztere Bewegung findet nicht eben so statt, wie wenn der Umdrehungspunkt in Ruhe wäre. Der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Geschosses beschreiben jeder eine eigene Bahn, und wird in irgend einem Augenblicke der Bewegung durch jeden dieser Punkte eine Ebene senkrecht auf die Richtung seiner Geschwindigkeit gelegt, so bilden diese beiden Ebenen, welche nur momentan einander parallel werden können, einen Winkel mit einander, dessen Cosinus nach 9 gleich $\frac{F}{\sqrt{F^2+K^2+L^2}}$ ist.

Da die Größe g' in die Gleichungen (B,) nicht eingeht, so hat die Schwere des Geschosses nur insofern Einfluß auf die umdrehende Bewegung desselben, als diese von der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ und deren Theilen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ abhängt; und wenn, wie in II und III vorausgesetzt worden, der Mittelpunkt und Schwerpunkt zusammenfallen, so ist die Rotations-Bewegung von der Schwerkraft gänzlich unabhängig.

§ 23.

Die allgemeine Integration der Gleichungen (A,) und (B,) stellt sich, von dem jetzigen Standpunkte der Analysis aus betrachtet, als eine Sache der Unmöglichkeit dar, und um Nutzen aus ihnen zu ziehen, ist man genöthigt, die weitere Behandlung der Aufgabe auf die einfachsten Fälle zu beschränken. Selbst wenn es möglich wäre, diese Gleichungen

in strenger Form zu integriren und aufzulösen, müßte man zur Erleichterung der Übersicht und Anwendung auf Vereinfachung der erhaltenen Formeln bedacht seyn, und da es nicht sowohl darauf ankommt, die Eigenthümlichkeiten der Rotations-Bewegung in allen ihren Einzelnheiten kennen zu lernen, als vielmehr die wesentlicheren Gesetze derselben und ihren Einfluß auf die Flugbahn des Geschosses zu ermitteln, so muß es um so mehr darum zu thun seyn, die Aufgabe von den Verwickelungen, welche sich vermeiden lassen, zu befreien, als gerade die einfacheren Fälle der Rotation am besten dazu geeignet seyn werden, über die Haupteigenschaften dieser Bewegung und deren Folgen Aufklärung zu geben.

Nimmt man zuvörderst an,

1) der Mittelpunkt F des Geschosses falle in eine der Hauptachsen des Schwerpunkts, z. B. in die Achse der z_1, so hat man $u = v = 0$, und die Excentricität ε ist als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem sie auf der Seite Gz_1 dieser Achse oder auf der entgegengesetzten Seite liegt (§ 13).

Setzt man

2) weiter voraus, die Masse des Geschosses sey um die Achse der z_1 symmetrisch vertheilt, so werden die auf die beiden andern Hauptachsen sich beziehenden Drehungs-Momente $\frac{A}{g}$ und $\frac{B}{g}$ einander gleich.

Bezeichnet $\mathfrak{D}_1$ die (in Gewichtseinheiten anzugebende) mittlere Dichtigkeit des Geschosses, so hat man

$$M = \frac{4}{3}\pi \mathfrak{D}_1 l^3,$$

und kann setzen

$$A = B = \frac{2}{5} M l^2 (1+\varepsilon k_1), \qquad C = \frac{2}{5} M l^2 (1+\varepsilon k'),$$

in welchen Ausdrücken k_1 und k' beständige, von der Vertheilung der Masse im Innern des Geschosses abhängige, Größen, und $\frac{1}{k_1}$, $\frac{1}{k'}$ Längenmaße vorstellen. Wird ferner zur Abkürzung

μ statt $\frac{2n\mathfrak{D}\pi l^2}{(i+2)M}$ oder statt $\frac{3}{2}\frac{n\mathfrak{D}}{(i+2)\mathfrak{D}_1 l}$, und ϱ statt $\frac{A}{M}$ oder statt $\frac{2}{5}l^2(1+\varepsilon k_1)$

gesetzt, so daß $\frac{1}{\mu}$, weil n von der Dimension $2-i$ ist (§ 1), eine Größe von der Dimension $i-1$, und ϱ ein Flächenmaß bedeutet, so geben

die Gleichungen (A_{1}) in

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= -\,\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial x}{\partial t}\,,\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2} &= -\,\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial y}{\partial t}\,,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \gamma''}{\partial t^2} &= -g - \mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial z}{\partial t}\,,
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots(A_{11})$$

die Gleichungen (B_{1}) in

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\varepsilon(k'-k_1)}{1+\varepsilon k_1}\,r q = \varepsilon\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left(\beta\frac{\partial x}{\partial t} + \beta'\frac{\partial y}{\partial t} + \beta''\frac{\partial z}{\partial t}\right),\\
&\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\varepsilon(k'-k_1)}{1+\varepsilon k_1}\,p r = -\varepsilon\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial t}\right),\\
&\frac{\partial r}{\partial t} = 0
\end{aligned}\right\}\;\ldots(B_{11})$$

über.

Vermöge der dritten Gleichung (B_{11}) hat man, wenn c eine Constante vorstellt,

$$r = c,$$

woraus folgt, daß unter den Voraussetzungen 1) und 2) die Umdrehung um die Achse der z_1 während der ganzen Dauer der Bewegung gleichförmig ist, obgleich diese, im Innern des Geschosses feste, Achse die Richtung ihrer Lage im Raume jeden Augenblick ändern kann.

Weil $A = B$ ist, so sind alle durch den Schwerpunkt gehenden Geraden in dem auf der Achse der z_1 senkrechten Durchschnittskreise $x_1 G y_1$ des Geschosses Hauptachsen, und kann diejenige dieser Geraden, welche im Anfange der Bewegung mit dem im Aufsteigen von der untern nach der obern Seite der Horizontal-Ebene $x^0 G y^0$ begriffenen Theil des Durchschnitts dieser Ebene mit der Ebene $x_1 G y_1$ zusammenfiel, zur Achse $G x_1$ genommen werden, wodurch die constante Winkelgeschwindigkeit c, da die Drehung um die Achse der z_1 hiernach von $G x_1$ oder $G L$ aus in der Richtung zunächst gegen die, anfänglich oberhalb der Ebene $x^0 G y^0$ befindliche, Achse $G y_1$

Statt hat, positiv, und der Winkel φ, indem man ihn von dem genannten Durchschnittstheile aus rechnet, für $t = 0$ ebenfalls gleich Null wird. Durch diese Annahme wird zugleich für jeden Zeitpunkt der Bewegung bestimmt, welcher der beiden Theile des Durchschnitts der Ebenen $x^\circ G y^\circ$ und $x_, G y_,$ den Schenkel GL des Winkels ψ, welcher Halbmesser des Durchschnittskreises $x_, G y_,$ den Schenkel $Gx_,$ des Winkels φ, und welcher der beiden Theile der auf diesem Kreise senkrechten Achse der $z_,$ den Schenkel $Gz_,$ des Winkels θ bildet (§13).

Die Winkel ψ, φ, θ, welche hier auf den Schwerpunkt G als ihren gemeinschaftlichen Scheitel bezogen sind, lassen sich, da man den Mittelpunkt F, wie den Schwerpunkt G, für den Umdrehungspunkt nehmen kann, und die Gleichungen $(A_,)$, $(B_,)$, $(A_{,,})$, $(B_{,,})$ von der Wahl dieses Punktes unabhängig sind, eben so gut auf den Mittelpunkt beziehen (§15), so dass, so weit die Achsen $Gx_,$, $Gy_,$, $Gz_,$, Gx° etc. hier angeführt sind, alles hier Betreffende auch auf die Parallelen $Fx_,$, $Fy_,$, $Fz_,$, Fx° etc. Anwendung findet. Indessen ist die Excentricität ε nur vom Schwerpunkt aus und (bei positivem Werthe) nach der positiven Richtung der Achse der $z_,$ zu rechnen, und muss ferner bemerkt werden, dass die Parallelen $Fx_,$, $Fy_,$, $Fz_,$ unter den hier gemachten Voraussetzungen, und schon unter der Voraussetzung 1), ebenfalls die Hauptachsen des Mittelpunkts sind, indem von den Hauptachsen, welche irgend einem Punkte in einer Hauptachse des Schwerpunkts eines Körpers zugehören, nicht nur die eine mit der letztern Hauptachse zusammenfällt, sondern auch die beiden andern mit den beiden andern des Schwerpunkts parallel sind (*).

(*) Dieser Satz stimmt mit P. Méc. II. no 390 nicht ganz überein. Sind aber Gx, Gy, Gz die Hauptachsen des Schwerpunkts irgend eines Körpers, $Ox_,$, $Oy_,$, $Oz_,$ die Hauptachsen eines Punktes O desselben, für welchen x, y, z die Werthe 0, 0, ε haben, so hat man, wenn a, b, c etc. in der Bedeutung wie in Méc. II. no 377 genommen werden,

$$\int x_, y_, dm = ab\int x^2 dm + a'b'\int y^2 dm + a''b''\int (z-\varepsilon)^2 dm = 0,$$
$$\int x_, z_, dm = ac\int x^2 dm + a'c'\int y^2 dm + a''c''\int (z-\varepsilon)^2 dm = 0,$$
$$\int y_, z_, dm = bc\int x^2 dm + b'c'\int y^2 dm + b''c''\int (z-\varepsilon)^2 dm = 0.$$

In dem besondern, hier zu erwähnenden, Falle, wenn die Hauptachse des Schwerpunkts, welche den Mittelpunkt F enthält, und um welche die Masse des Geschosses symmetrisch vertheilt ist, im Anfange der Bewegung die augenblickliche Rotations-Achse bildet und mit der Richtungslinie der Geschwindigkeit des Schwerpunkts zusammenfällt, würde, wenn zugleich die Schwerkraft ohne Wirkung bliebe, augenscheinlich weder die Rotation noch die Excentricität einigen Einfluß auf die Bewegung des Geschosses haben, und sowohl die Umdrehungsgeschwindigkeit als die Richtung der Rotationsachse und jene der fortschreitenden Bewegung immer unverändert bleiben, und man hätte dann, indem man, wie erlaubt ist, die Richtungslinie der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts in die Achse der x legte, für die ganze Dauer der Bewegung

$$\theta = 90^\circ,\quad \psi = 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ,\quad p = q = 0,\quad y = z = 0.$$

Wirklich wird durch diese Werthe der Unbekannten vermöge der Ausdrücke für α, β, γ &c. in §13 der zweiten, dritten, vierten und fünften der sechs Bedingungsgleichungen (A'') und (B'') genügt, und es bleiben von diesen Gleichungen nur die erste, in der das den Factor ε enthaltende Glied gleichfalls herausfällt, und die letzte, r oder $\frac{d\varphi}{dt} = c$, als Bestimmungsgleichungen übrig; die rotirende Bewegung ist somit gleichförmig, und die fortschreitende von der Rotation und der Excentricität unabhängig.

§24.

Um die Gleichungen (A'') und (B'') weiter zu vereinfachen, werde 3) angenommen, die Horizontale GL, welche im ersten Augenblicke der Bewegung mit der Halbachse Gx zusammenfällt (§23), stehe in diesem Augenblicke senkrecht auf der Vertikal-Ebene $x'Oz'$, in der die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts liegt, so zwar, daß sie einen Winkel von 90° mit der Achse Ox' bildet, und in demselben Zeitpunkte falle die

Diesen drei Gleichungen geschieht Genüge durch $a = b' = c'' = \pm 1$ und $a' = a'' = b = b'' = c = c' = 0$; und, wenn $\int x^2 dm = \int y^2 dm$ ist, allein durch $a'' = b'' = 0$; woraus in Verbindung mit Méc. II. №. 381 der hier angeführte Satz folgt.

Richtung der augenblicklichen Rotations-Achse durch den Schwerpunkt in die Achse der x_1, oder das Geschoß erhalte keine Umdrehungsgeschwindigkeit um die Achsen der y_1 und der z_1. Offenbar werden in solchem Falle, da auf beiden Seiten der Ebene $x^\circ O z^\circ$ alles gleich ist, während der ganzen Dauer der Bewegung der Schwerpunkt G und der Durchschnitt des Geschosses, in welchem die Achsen Gy_1 und Gz_1, somit auch der Mittelpunkt, sich befinden, in dieser Ebene, und die augenblickliche Rotations-Achse senkrecht auf derselben bleiben; der Winkel θ kann nun aber nicht mehr auf die Werthe von 0 bis 180° (§ 13) beschränkt seyn, sondern muß in positiver und negativer Richtung bis zu unbestimmter Größe wachsen, und die Halbachse Gy_1 deshalb, obgleich keine Drehung um die Achse der z_1 Statt hat, im Durchschnittskreise $x_1 Gy_1$ eben so wohl auf der unteren, als auf der obern Seite der Horizontalebene $x^\circ O y^\circ$ sich befinden können. (*) Demgemäß kann unter der obigen Voraussetzung 3), damit die Excentricität ε, wie sie in die Gleichungen (A_{11}) und (B_{11}) aufgenommen ist, immer als eine positive Größe zu betrachten sey, zur Halbachse Gz_1, wie in der Folge geschehen wird, stets der den Mittelpunkt F enthaltende größere Theil des auf dem Durchschnitt $x_1 Gy_1$ senkrechten, die Achse der z_1 bildenden, Durchmessers genommen werden. Denn, wenn auch durch das zur Bestimmung der Halbachse Gz_1 anzuwendende Verfahren (§ 13) nach dem der anfänglichen Lage des Durchschnittskreises $x_1 Gy_1$ gemäß angenommenen Anfangswerthe des Winkels θ der kleinere Theil dieses Durchmessers als Halbachse Gz_1 sich ergibt, so darf man, wie erlaubt ist, nur den Anfangswerth des Winkels θ um 180° größer nehmen, und somit die Halbachse Gy_1 in den unter der Horizontalebene $x^\circ O y^\circ$ befindlichen Theil des Kreises $x_1 Gy_1$ legen, um jenen größeren Theil als Halbachse Gz_1 zu erhalten.

Nach diesen Voraussetzungen hat man für jeden Werth von t

$$r \text{ oder } t = 0,\quad q = 0,\quad y = y^\circ = 0,\quad \varphi = 0,\quad \psi = 90^\circ,$$

und zugleich (§ 13)

(*) Anmerkung der folgenden Seite.

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \cos\theta, \qquad \gamma = -\sin\theta,$$
$$\alpha' = -1, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = 0,$$
$$\alpha'' = 0, \qquad \beta'' = \sin\theta \qquad \gamma'' = \cos\theta;$$

wodurch das System der Gleichungen (A_{II}) und (B_{II}) auf die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \varepsilon\,\frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2} &= -\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2} &= -g - \mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \varepsilon\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left(\cos\theta\,\frac{\partial x}{\partial t} + \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial t}\right), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathfrak{D})$$

zurückgeht.

Vermöge der Beziehungen, welche zwischen den Winkeln ψ, φ, θ und den Grössen α, β, γ ... p, q, r Statt finden (§13), ist die Winkelgeschwindigkeit p unter den obigen Voraussetzungen gleich $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, und die Unbekannten des Problems sind somit auf die drei Grössen x, z, θ zurückgebracht, welche durch die drei Gleichungen ($\mathfrak{D}$) ihre Bestimmung erhalten. (*)

(*) Dem Bedenken, welches sich gegen die Zulässigkeit der Annahme erheben könnte, daß die Beschränkung des Winkels θ auf die positiven Werthe von 0 bis 180° (§13) in dem besondern Falle, von dem hier die Rede ist, unterliegt, läßt sich durch bloßen Wechsel der Coordinaten-Zeichen, welcher ganz Sache der Willkühr ist, begegnen.

Nimmt man nämlich die Achse der $y_{,}$ statt der Achse der $z_{,}$ als diejenige an, in der der Mittelpunkt F sich befindet, und um welche die Masse des Geschoßes symmetrisch vertheilt ist (§23), wodurch $\kappa = \varepsilon = 0$, $A = C$, und $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, $\varphi = c$ wird, und läßt die Hauptachse $Gx_{,}$ an die Stelle der $Gy_{,}$, diese an die Stelle der $Gz_{,}$, und die letztere an die Stelle der $Gx_{,}$ treten, so daß die Ebene der $x_{,}$ und $y_{,}$ mit der Ebene $x'Oz'$ und die ursprüngliche Rotations-Achse mit der Achse $Gz_{,}$ zusammenfällt, so wird der Winkel ψ statt φ gleich Null, der Winkel θ statt ψ gleich 90°, und in den Bestimmungsgleichungen der Bewegung, welche übrigens ganz den Gleichungen ($\mathfrak{D}$) gleich werden, tritt δ anstatt ε, der Winkel $\varphi = x'Gx_{,} = z'Gy_{,}$, welcher in positiver und negativer Richtung bis zu unbestimmter Größe wachsen kann (§13), statt des Winkels $\theta = z'Gz_{,}$, und $r = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ anstatt p, auf.

Den Festsetzungen gemäß, welche den oben genannten Beziehungen zum Grunde liegen, ist der Winkel θ oder $z^{\circ}Gz_1$ von der Achse Gz° an in der Richtung Gx° gegen Gz° gerechnet, und nach derselben Richtung, oder von Gz_1 gegen Gx_1, ist auch die Winkelgeschwindigkeit $p = \frac{d\theta}{dt}$ zu nehmen (§5). Haben aber θ und p die entgegengesetzte Richtung von Gz° gegen Gx°, so darf man nur in den Gleichungen (D) die Zeichen von θ und p verändern, um sie auf diesen Fall anwenden, und die Werthe der Größen θ und p immer mit positivem Zeichen nehmen zu können.

In den zwei ersten dieser Gleichungen können die Glieder $\varepsilon\frac{d^2\sin\theta}{dt^2}$ und $-\varepsilon\frac{d^2\cos\theta}{dt^2}$ als die Repräsentanten des Einflusses der Excentricität und der Rotation des Geschoßes auf die Flugbahn desselben gelten. Sie zeigen, daß, so wie die Rotation ohne Excentricität (§20), eben so auch die Excentricität ohne Rotation, keinen solchen Einfluß hat, oder daß die Excentricität nur mittelst der Rotation auf die Flugbahn einwirken kann.

In der dritten Gleichung (D) ist der Factor $\cos\theta\frac{dx}{dt} + \sin\theta\frac{dz}{dt}$ der der Achse Gz_1 parallele Theil der Totalgeschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ des Mittelpunkts F (§15). So oft dieser Factor verschwindet, wird $\frac{dp}{dt}$ gleich Null, und p ein Maximum oder ein Minimum. Es folgt hieraus, daß, so oft die Achse der z_1 senkrecht auf der Richtung Fa der Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts steht, d. i. so oft die Achse der x_1 (der die Excentricität GF enthaltende Durchmesser) in diese Richtung fällt oder eine Berührende der Bahn des Mittelpunkts wird, welche Lage in der Ebene $x^{\circ}Oz^{\circ}$ sie sonst haben mag, die Winkelgeschwindigkeit p einen größten oder kleinsten Werth erhält, und zwar ist leicht einzusehen, daß das Minimum Statt hat, wenn der Mittelpunkt F in der Richtung Fa sich vor dem Schwerpunkt G befindet, und das Maximum, wenn der Mittelpunkt hinter dem Schwerpunkt folgt, indem man überlegt, daß, so lange bei der Drehung des Geschoßes um den Schwerpunkt der Mittelpunkt sich von der hintern nach der vordern Seite bewegt, die Umdrehung durch den Widerstand des flüssigen Mittels verzögert, dagegen beschleunigt wird, während er von der vordern nach der hintern Seite zurückgeht.

§25.

Zwischen den Coordinaten des Schwerpunkts und des Mittelpunkts in ihren

Bahnen, so wie zwischen den Geschwindigkeiten beider Punkte, finden nunmehr folgende Beziehungen Statt. Man hat

$$\left.\begin{array}{ll} x = x^\circ - \varepsilon \sin\theta, & z = z^\circ + \varepsilon \cos\theta, \\ \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x^\circ}{\partial t} - \varepsilon p \cos\theta, & \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z^\circ}{\partial t} - \varepsilon p \sin\theta, \end{array}\right\} (D15),$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial s^\circ}{\partial t}\right)^2 - 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z^\circ}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]},$$

$$\frac{\partial s^\circ}{\partial t} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]},$$

und der Cosinus des Winkels, den die Richtung Ga der Bewegung des Schwerpunkts mit der Richtung Fa' der Bewegung des Mittelpunkts einschließt, oder

$$\cos a, Fa' \; (D9) = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x^\circ}{\partial s^\circ} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z^\circ}{\partial s^\circ} = \frac{\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x^\circ}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z^\circ}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial s^\circ}{\partial t}}$$

$$\text{ist} = \frac{\left(\frac{\partial s^\circ}{\partial t}\right)^2 - \varepsilon p\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z^\circ}{\partial t}\sin\theta\right)}{\frac{\partial s^\circ}{\partial t}\sqrt{\left[\left(\frac{\partial s^\circ}{\partial t}\right)^2 - 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z^\circ}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]}},$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon p\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta\right)}{\frac{\partial s}{\partial t}\sqrt{\left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]}}.$$

Wenn der Winkel θ oder $\left\{\begin{array}{l} z^\circ Fz, \\ x^\circ Fy, \end{array}\right. = x^\circ Fa'$ ist, so hat man $\frac{\partial x}{\partial s}$ oder $\cos x^\circ Fa' = \cos\theta$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ oder $\cos\left\{\begin{array}{l} z^\circ Fa' \\ 90^\circ - x^\circ Fa' \end{array}\right. = \sin\theta$, daher $\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta = \frac{\partial s}{\partial t}\cos^2\theta$, $\frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta = \frac{\partial s}{\partial t}\sin^2\theta$, und $\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta = \frac{\partial s}{\partial t}$, $\cos a, Fa' = 1$; und wenn der Winkel $\theta = 180^\circ + x^\circ Fa'$ ist, so hat man $\frac{\partial x}{\partial s}$ oder $\cos x^\circ Fa' = \cos(\theta - 180^\circ) = -\cos\theta$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ oder $\cos(90^\circ - x^\circ Fa') = \cos(270^\circ - \theta) = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$, daher $\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta = -\frac{\partial s}{\partial t}$, und ebenfalls $\cos a, Fa' = 1$. So oft demnach die Parallele Fy (deren positiver Theil) in die Berührende der Bahn des Mittelpunkts fällt, was bei jeder ganzen Umdrehung des Geschosses zwei Mal, einmal auf der vordern, das andere Mal auf der hintern Seite des Mittelpunkts Statt findet, wird der Winkel $a, Fa' = 0$, oder die Berührende Fa' mit der Berührenden Ga der Bahn des Schwerpunkts parallel, und eben so oft muß somit auch die Achse der y mit der Berührenden Ga in eine Linie fallen, oder der Winkel $x^\circ Ga$ das eine Mal $= x^\circ Gy$, das andere Mal $= x^\circ Gy - 180^\circ$, und $\frac{\partial x^\circ}{\partial s^\circ}$ beziehungsweise $= \pm\cos\theta$, $\frac{\partial z^\circ}{\partial s^\circ} = \pm\sin\theta$ werden. Und weil die Achsen der y und der z senkrecht

auf einander stehen, ist der Abstand zwischen den beiden Berührenden, so oft die Achse der $z_,$ und Ga zusammenfallen, gleich der Excentricität GF.

Wenn $\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dz}{dt}\sin\theta = 0$ wird oder die Achse der $z_,$ in die Berührende Fa' fällt (§24), so wird $\cos a_,Fa' = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + (\varepsilon p)^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{ds^\circ}{dt}\right)^2 - (\varepsilon p)^2}}{\frac{ds^\circ}{dt}}$, und wenn

$\frac{dx^\circ}{dt}\cos\theta + \frac{dz^\circ}{dt}\sin\theta$, der der Achse der $z_,$ parallele Theil der Totalgeschwindigkeit $\frac{ds^\circ}{dt}$ des Schwerpunkts, gleich Null wird oder die Achse der $z_,$ in die Berührende Ga fällt, so hat man $\cos a_,Ga' = \frac{\frac{ds^\circ}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{ds^\circ}{dt}\right)^2 + (\varepsilon p)^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - (\varepsilon p)^2}}{\frac{ds}{dt}}$.

Die Bahnen des Schwerpunkts und des Mittelpunkts müssen sich bei jeder ganzen Umdrehung des Geschosses zwei Mal schneiden, weil x, z je nach den Werthen von $\sin\theta$ und $\cos\theta$ abwechselnd bald größer bald kleiner sind als x°, z°; beide Punkte können aber nicht zu gleicher Zeit oder für gleiche Werthe der Zeit t oder des Winkels θ, den man sich als eine Zeit-Function zu denken hat, in den Durchschnittspunkten ankommen, weil sie nie zusammenfallen können. Bezeichnet $\theta_,$ den dem Zeitpunkte, in welchem der Schwerpunkt sich in irgend einem Durchschnitte beider Bahnen befindet, entsprechenden Werth von θ, und bezieht sich $\theta_{,,}$ in gleichem Sinne auf den Mittelpunkt, so sind in Bezug auf diesen Durchschnitt $x^\circ = \Pi\theta_,$ und $z^\circ = \Pi_,\theta_,$, die Coordinaten des Schwerpunkts, entsprechende Functionen des Winkels $\theta_,$ und somit der zugehörigen Zeit t, welche Functionen aus den Gleichungen für die Bewegung erst zu bestimmen wären, und $x = \Pi\theta_{,,} - \varepsilon\sin\theta_{,,}$, $z = \Pi_,\theta_{,,} + \varepsilon\cos\theta_{,,}$ die dem Winkel $\theta_{,,}$ und dem zugehörigen Werthe von t entsprechenden Coordinaten des Mittelpunkts. Weil aber für den Durchschnittspunkt $x^\circ = x$ und $z^\circ = z$ seyn müssen, so hat man die zwei Gleichungen

$$\Pi\theta_, = \Pi\theta_{,,} - \varepsilon\sin\theta_{,,}, \qquad \Pi_,\theta_, = \Pi_,\theta_{,,} + \varepsilon\cos\theta_{,,},$$

welche zur Bestimmung von $\theta_,$ und $\theta_{,,}$ und der zugehörigen Zeiten, und somit auch zur Bestimmung der entsprechenden Coordinaten, dienen müssen.

§26.

Die Darstellung der Integrale der beiden ersten Gleichungen (D)

in geschlossener Form ist, selbst unter den Voraussetzungen $\varepsilon = 0$ und $i = 2$, trotz der vielen darauf verwendeten Mühe, bisher noch nicht gelungen; einem um so geringeren Erfolge wäre daher entgegenzusehen, wollte man versuchen, die drei Gleichungen (D) in ihrer allgemeinen Gestalt auch nur angenähert zu integriren.

Da es sich aber, nach dem Zwecke der gegenwärtigen Abhandlung, hauptsächlich darum handelt, zu untersuchen, *ob die Rotations-Bewegung durch den Widerstand, den ihr das flüssige Mittel entgegensetzt, irgend eine erhebliche Veränderung in der Flugbahn des Geschosses hervorzubringen vermag*, und da ein solcher Einfluss, wenn er Statt findet, selbst dann aus der Rechnung sich ergeben muss, wenn sie die Schwerkraft als nicht vorhanden voraussetzt, indem mit Sicherheit geschlossen werden darf, dass, wenn ein der Einwirkung der Schwerkraft nicht unterworfenes Geschoss durch die Rotation keine merkliche Ablenkung aus der Bahn, welche es ohne Rotation beschreiben würde, erleidet, diese Ablenkung auch durch die hinzutretende Wirkung der Schwerkraft keine erhebliche Grösse erreichen kann (§ 69), so wird im Folgenden

4) das Glied g in der zweiten Gleichung (D) gleich Null angenommen werden, wodurch die weitere Behandlung der Gleichungen um vieles einfacher wird.

Vermöge der Voraussetzungen 1), 2), 3) und 4) sind demnach die Gleichungen für die fortschreitende und umdrehende Bewegung des Geschosses,

1) wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ die Richtung von $Gx°$ gegen $Gz°$ hat, oder wenn die Theile der vordern Halbkugel sich von unten nach oben bewegen,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2} &= -\mu \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2} &= -\mu \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}, \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= -\frac{\mu}{\rho} \varepsilon \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} \left(\cos\theta \frac{\partial x}{\partial t} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial t}\right),
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (E)$$

2) wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ die Richtung von $Gz°$ gegen $Gx°$ hat oder die Theile der vordern Halbkugel sich von oben nach unten bewegen (§ 24),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2} &= -\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2} &= -\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},\\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= -\frac{\mu}{\varrho}\,\varepsilon\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\left(\cos\theta\,\frac{\partial x}{\partial t} - \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial t}\right),
\end{aligned}\right\}\ \dots\dots\dots (E_1).$$

Weil die Größe g außer Acht bleibt, so kann man die Lage der Coordinaten-Achsen Ox° und Oz° unabhängig von der Richtung der Schwerkraft wählen, und wird deßhalb die Achse Ox° in die Richtungslinie der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, oder, was auf eins hinauskommt, diese Richtung in die horizontale Achse Ox° selbst, versetzt werden.

Man wird ferner der Einfachheit wegen annehmen, daß die Achse der z, im Anfange der Bewegung mit der Achse Oz° zusammenfalle, so zwar, daß der Mittelpunkt im Falle 1) unter, im Falle 2) über dem Schwerpunkt liegt, und den Ort, in welchem der Mittelpunkt F des Geschosses in diesem Zeitpunkt sich befindet, zum Anfangspunkt der festen Achsen Ox° und Oz° nehmen, welche Achsen deßhalb von jetzt an mit Ox und Oz bezeichnet werden sollen.

Bedeutet dann f° die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts, f die Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts, k den Anfangswerth von p oder von $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, so hat man nach §24 u. 25 für $t=0$

im Falle 1) $\frac{\partial\theta}{\partial t} = k,\ \theta = \pi,\ x^\circ = 0,\ z^\circ = +\varepsilon,\ x = 0,\ z = 0,$

$$\frac{\partial x^\circ}{\partial t} = \frac{\partial s^\circ}{\partial t} = f^\circ,\ \frac{\partial z^\circ}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} = f = f^\circ + \varepsilon k,\ \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

im Falle 2) $\frac{\partial\theta}{\partial t} = k,\ \theta = 0,\ x^\circ = 0,\ z^\circ = -\varepsilon,\ x = 0,\ z = 0.$

$$\frac{\partial x^\circ}{\partial t} = \frac{\partial s^\circ}{\partial t} = f^\circ,\ \frac{\partial z^\circ}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} = f = f^\circ + \varepsilon k,\ \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Die Gleichungen des zweiten Falles (E_1) werden zunächst Gegenstand der folgenden weiteren Entwickelungen seyn.

127.

Die gleichzeitige Integration der drei Gleichungen (E.) in endlicher Form muß noch immer für unausführbar halten, und man muß sich bemühen, wenn man dazu gelangt, sie in Reihenform mit brauchbarer Annäherung zu integriren. Die Hauptschwierigkeiten, welche sich aber auch dieser Methode entgegenstellen, liegen darin, daß die beiden ersten Gleichungen (E.) den Winkel θ, welcher als Function der Zeit t aus der dritten dieser Gleichungen bestimmt werden muß, und welcher, wenn dem Geschoße im Anfange der Bewegung eine beträchtliche Umdrehungsgeschwindigkeit mitgetheilt wird, sehr große Werthe erhalten kann, in den Functionen $\sin\theta$ und $\cos\theta$ enthalten, welche Functionen aus Reihen bestehen, die zwar immer, aber nur für sehr kleine Werthe von θ, schon in den ersten Gliedern, convergiren.

Die Integrale der beiden ersten Gleichungen (E.) lassen sich indessen für sich, ohne gleichzeitige Bestimmung der Function θ mit Hülfe der dritten Gleichung, angenähert durch das nachfolgende Verfahren darstellen.

Man setze zuerst $\varepsilon = 0$. Dadurch wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i-1}\cdot\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i-1}\cdot\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (a)$$

Addirt man das Product der ersten dieser Gleichungen durch $\frac{dx}{dt}$ zum Product der zweiten durch $\frac{dz}{dt}$, so erhält man

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} \text{ oder } \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = -\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i+1}, \text{ und hieraus}$$

$$\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i}} = -\mu.$$

Die erste Integration der letztern Gleichung gibt, wenn C eine Constante vorstellt,

$$\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i-1}} = (i-1)\mu t + C,$$

und da für $t=0$ die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t} = f$ seyn soll (§26),

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} = \frac{1}{(i-1)\mu t + \left(\frac{1}{f}\right)^{i-1}} = \frac{f^{i-1}}{1+(i-1)f^{i-1}\mu t},$$

woraus $\quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{f}{(1+(i-1)f^{i-1}\mu t)^{\frac{1}{i-1}}} \quad$ folgt.

Durch die zweite Integration findet sich

$$s = \frac{1}{(i-2)f^{i-2}.\mu}\cdot\frac{1}{(1+(i-1)f^{i-1}\mu t)^{-\frac{i-2}{i-1}}} + C = \frac{(1+(i-1)f^{i-1}\mu t)^{\frac{i-2}{i-1}} - 1}{(i-2)f^{i-2}.\mu},$$

indem s mit t zugleich verschwinden soll, und für den besondern Werth $i=2$, für welchen der letztere Ausdruck gleich $\frac{0}{0}$ wird, erhält man, wenn unter log der natürliche Logarithmus verstanden wird,

$$s = \frac{1}{\mu}\log(1+\mu f t), \text{ wofür } s_2 \text{ gesetzt werde.}$$

Die Gleichungen (a) geben ferner

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}{\frac{\partial z}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}}{\frac{\partial s}{\partial t}}, \text{ und, indem man integrirt,}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C.\frac{\partial s}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial t} = C_1.\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Soll für $t=0$, wie hier der Fall ist, $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ seyn, so muß $C=1$ und $C_1=0$ genommen werden. Man hat daher für jeden Werth von t

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,\quad x = s,\quad z = 0,\quad \ldots\ldots (a_1)$$

wie sich voraussehen ließ, weil, wenn von der Schwerkraft und der Excentricität des Geschosses zugleich abgesehen wird, die Bewegung nur eine geradlinige seyn kann.

Man bemerke, daß das letztere Resultat (a_1) auch dann

Statt findet, wenn $\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i-1}\cdot\frac{dx}{ds}$, $\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i-1}\cdot\frac{dz}{ds}$ in den Gleichungen (a) Aggregate mehrerer solcher Ausdrücke, in denen μ und i verschiedene Werthe haben, vorstellen (§15).

§28.

Der allgemeine Ausdruck für s im vorigen § kann dazu dienen, über den dem beständigen numerischen Coefficienten n in μ (§23) beizulegenden Werth, und dessen Abhängigkeit vom Exponenten i (§1), einigen Aufschluß zu geben.

Das Newton'sche Widerstandsgesetz, wonach $i=2$ ist, gibt bekanntlich $n=1$,(*) welche Zahl von Newton, um sie mit seinen Versuchen in Übereinstimmung zu bringen, auf $1/2$, von Borda und andern aber, ihren Erfahrungen gemäß, auf $3/5$ herabgesetzt worden ist. Es entsteht nun die Frage, wie dieser Coefficient für andere Werthe von i beschaffen seyn muß.

Wird jener Ausdruck für s entwickelt, so ergibt sich

$$s=\frac{(i-2)f^{i-1}\mu t-\frac{1}{2}\frac{i-2}{(i-1)^2}\left((i-1)f^{i-1}\mu t\right)^2+\frac{1}{6}\frac{i(i-2)}{(i-1)^3}\left((i-1)f^{i-1}\mu t\right)^3+\cdots}{(i-2)f^{i-2}\mu}$$

$$=ft-\tfrac{1}{2}\mu f^{i-2}(ft)^2+\tfrac{1}{6}i(\mu f^{i-2})^2(ft)^3-\tfrac{1}{24}i(2i-1)(\mu f^{i-2})^3(ft)^4+\tfrac{1}{120}i(2i-1)(3i-2)(\mu f^{i-2})^4(ft)^5\cdots$$

und für $i=2$, indem man den zugehörigen Werth von μ mit μ_2 bezeichnet,

$$s_2 \text{ oder } \frac{1}{\mu_2}\log(1+\mu_2 ft)=ft-\tfrac{1}{2}\mu_2(ft)^2+\tfrac{1}{3}\mu_2^2(ft)^3-\tfrac{1}{4}\mu_2^3(ft)^4+\tfrac{1}{5}\mu_2^4(ft)^5\cdots\cdots$$

Für einen bestimmten Werth von t muß sich μ, und hieraus n, als Function von i so finden lassen, daß der zurückgelegte Weg $s=s_2$, oder daß die durch den Widerstand entstehende Verzögerung der Bewegung $ft-s=ft-s_2$ wird; es kann aber, was für sich klar ist, keine solche Function geben, durch welche diese Gleichheit unabhängig von t oder für jeden Werth von t Statt hat, weil sonst der Exponent i willkührlich gewählt werden könnte, der richtige Werth von i aber, welcher mit dem ihm entsprechenden Werthe des Coefficienten n den berechneten Weg s für jeden Werth von t

(*) P. Méc. II. № 365.

in Übereinstimmung mit der Erfahrung gaben muß, (den Ausdruck für den Widerstand $\frac{nDbv^i}{g}$ (§1) als ein einziges Glied gedacht) wenn überhaupt ein solcher Werth von i möglich ist, nur ein einziger seyn kann. Da jedoch im Bereiche der artilleristischen Praxis die Größe der Zeit t auf eine kleine Zahl von Secunden beschränkt bleibt, so läßt sich aus der Gleichung § 52 wenigstens ungefähr beurtheilen, was aus μ und n werden muß, wenn i anders als gleich 2 genommen wird.

Diese Gleichung gibt, wenn man mit $-\frac{2}{(\breve{f}t)^2}$ multiplicirt,

$$\mu f^{i-2} - \frac{i}{3}\breve{f}t(\mu f^{i-2})^2 + \frac{i(2i-1)}{12}(\breve{f}t)^2(\mu f^{i-2})^3 - \frac{i(2i-1)(3i-2)}{60}(\breve{f}t)^3(\mu f^{i-2})^4 \dots = \mu_2 - \frac{2}{3}\breve{f}t\,\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\breve{f}t)^2\mu_2^3 - \frac{2}{5}(\breve{f}t)^3\mu_2^4 \dots$$

Setzt man $\mu f^{i-2} = \mu_2 + \mathfrak{Q}\mu_2^2 + \mathfrak{R}\mu_2^3 + \mathfrak{S}\mu_2^4 + \dots$, so wird

$$\begin{aligned}\mu_2 - \frac{2}{3}\breve{f}t\,\mu_2^2 + \frac{1}{2}(\breve{f}t)^2\mu_2^3 - \frac{2}{5}(\breve{f}t)^3\mu_2^4 \dots = \mu_2 &+ \mathfrak{Q}\mu_2^2 + \mathfrak{R}\mu_2^3 + \mathfrak{S}\mu_2^4 \dots \\ &- \frac{i}{3}\breve{f}t.\mu_2^2 - \frac{2i}{3}\mathfrak{Q}\breve{f}t.\mu_2^3 - \frac{i}{3}(\mathfrak{Q}+2\mathfrak{R})\breve{f}t.\mu_2^4 \dots \\ &+ \frac{i(2i-1)}{12}(\breve{f}t)^2.\mu_2^3 + \frac{i(2i-1)}{4}\mathfrak{Q}(\breve{f}t)^2.\mu_2^4 \dots \\ &- \frac{i(2i-1)(3i-2)}{60}(\breve{f}t)^3.\mu_2^4 \dots\end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\mathfrak{Q} = \frac{i-2}{3}\breve{f}t, \quad \mathfrak{R} = \frac{(i-2)(2i-9)}{36}(\breve{f}t)^2, \quad \mathfrak{S} = \frac{(i-2)(i^2-10i+27)}{135}(\breve{f}t)^3, \text{ etc.}$$

Man hat daher

$$\mu = \frac{\mu_2}{f^{i-2}}\left(1 + \frac{i-2}{3}\mu_2\breve{f}t + \frac{(i-2)(2i-9)}{36}(\mu_2\breve{f}t)^2 + \frac{(i-2)(i^2-10i+27)}{135}(\mu_2\breve{f}t)^3 \dots\right),$$

oder, da $\mu = \frac{3}{2}\frac{nD}{(i+2)\mathfrak{D}_1 l}$ (§23) und $\mu_2 = \frac{3}{8}\frac{n_2 D}{\mathfrak{D}_1 l}$ ist, wenn n_2 den Werth von n für $i = 2$, der gewöhnlich zu $\frac{3}{5}$ angenommen wird, bedeutet,

$$n = \frac{i+2}{4}\cdot\frac{n_2}{f^{i-2}}\left(1 + \frac{i-2}{3}\mu_2\breve{f}t + \dots\right).$$

In Bezug auf Projectile vom Geschütz-Caliber ist aus diesem Ausdrucke, da $\mu_2 s$ jedenfalls kleiner als 1 ist (§42), zu ersehen, daß die Größe n, welche die Dimension 2-i hat, für Werthe von i, welche der Zahl 2 nahe kommen, von $\frac{i+2}{4}\cdot\frac{n_2}{f^{i-2}}$ nicht sehr verschieden seyn kann,

und sich diesem Werthe um so mehr nähern muß, je kleiner μ_2 und je näher i an 2 ist. (*)

§29.

Es sey nunmehr

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= T + P_1\varepsilon + P_2\varepsilon^2 + P_3\varepsilon^3 + \dots,\\ \frac{dz}{dt} &= F_1\varepsilon + F_2\varepsilon^2 + F_3\varepsilon^3 + \dots,\end{aligned}\right\} \dots\dots (b)$$

in welchen Reihen T den Ausdruck für $\frac{dx}{dt}$, welcher aus den Gleichungen (E.) unter der Voraussetzung $\varepsilon = 0$ sich ergibt (§27), und $P_1, P_2 \dots F_1, F_2 \dots$ ebenfalls Functionen von t, und zwar, weil $\frac{dx}{dt} = f$, $\frac{dz}{dt} = 0$ ist für $t = 0$ (§26), Functionen, welche mit t zugleich verschwinden müssen, vorstellen.

Um diese Reihen in den Gleichungen (E.) für $\frac{dx}{dt}, \frac{dz}{dt}$ zu substituiren, muß auch der Factor $\left(\frac{dz}{dt}\right)^{i-1}$ in eine nach den Potenzen von ε geordnete Reihe entwickelt werden, wozu man sich folgenden Verfahrens bedienen kann.

Ist V irgend eine Function von U, und

$$U = \alpha + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \dots,$$

so hat man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze

$$V = V_0 + (\partial V)_0 \cdot u + \left(\frac{\partial^2 V}{2!}\right)_0 u^2 + \left(\frac{\partial^3 V}{3!}\right)_0 u^3 + \dots$$

und nach den Lehren und Bezeichnungen der combinatorischen Analytik (1)

(*) Wäre der Exponent 2 (den Ausdruck $\frac{nD^2V^i}{g}$ als einziges Glied angenommen) erweislich der richtige, so könnte nicht davon die Rede seyn, einen andern Werth von i an seine Stelle zu setzen. Weil aber diese Richtigkeit keineswegs entschieden ist, so muß gefragt werden, was ist für n zu nehmen, wenn i nicht gleich 2 ist? Und da die Werthe der Zeit t, auf welche die durch Versuche erlangte Bestimmung des zu i = 2 gehörigen Werthes von n sich gründet, innerhalb enger Gränzen liegen, so kann allerdings aus diesem Werthe von n ebenfalls für kleine Zeiten t auf diejenigen Werthe von n geschlossen werden, welche andern der Zahl 2 nahe liegenden Werthen von i entsprechen.

(1) Diese Formel ist aus Ohm, die Lehre vom Größten und Kleinsten, Berlin 1825, Anhang §1 entnommen, und dort in allgemeinerer Form gegeben.

$$\frac{\partial^n V}{n!} = \int \left[\frac{\partial^u V}{\partial U^u} \cdot \frac{(\partial U)^{u_1}}{(u_1)!} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 U}{2!}\right)^{u_2}}{(u_2)!} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^3 U}{3!}\right)^{u_3}}{(u_3)!} \cdots \right] \qquad (\Theta)$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n = u,$$

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots n u_n = n.$$

Zur Abkürzung ist hier ∂V, $\partial^2 V$, … anstatt $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}$, …, und $2!$, $3!$, … $n!$ anstatt 1.2, 1.2.3, …. 1.2.3.4…. n gesetzt, und bedeuten V_0, $(\partial V)_0$, $(\partial^2 V)_0$ … eben das, was V, ∂V, $\partial^2 V$ …, nachdem Null an die Stelle von u gesetzt worden ist. In gleichem Sinne sind ∂U, $\partial^2 U$ … U_0, $(\partial U)_0$, $(\partial^2 U)_0$ … $\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial U^2}\right)_0$ …. zu verstehen.

Werden die Bedingungs-Gleichungen der Formel (Θ) aufgelöst (2), so findet sich

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial U}\partial U, \quad \frac{\partial^2 V}{2!} = \frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial^2 U}{2!} + \frac{\partial^2 V}{\partial U^2}\frac{(\partial U)^2}{2!}, \quad \frac{\partial^3 V}{3!} = \frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial^3 U}{3!} + \frac{\partial^2 V}{\partial U^2}\partial U \frac{\partial^2 U}{2!} + \frac{\partial^3 V}{\partial U^3}\frac{(\partial U)^3}{3!}, \text{ u. s. w.}$$

(2) Die Auflösungen der Bedingungs-Gleichungen sind für die ersten Werthe von n folgende:

$n = 1$ gibt	$u_1 = 1$,		$u = 1$.
$n = 2$ gibt	$u_1 = 2$,		$u = 2$,
		$u_2 = 1$	$u = 1$.
$n = 3$ gibt	$u_1 = 3$,		$u = 3$,
	$u_1 = 1$,	$u_2 = 1$,	$u = 2$,
		$u_3 = 1$,	$u = 1$.
$n = 4$ gibt	$u_1 = 4$,		$u = 4$,
	$u_1 = 2$,	$u_2 = 1$	$u = 3$,
	$u_1 = 1$,	$u_3 = 1$	$u = 2$,
		$u_2 = 2$,	$u = 2$,
		$u_4 = 1$,	$u = 1$.
$n = 5$ gibt	$u_1 = 5$		$u = 5$,
	$u_1 = 3$,	$u_2 = 1$,	$u = 4$,
	$u_1 = 2$,	$u_3 = 1$,	$u = 3$,
	$u_1 = 1$,	$u_2 = 2$,	$u = 3$,
	$u_1 = 1$,	$u_4 = 1$,	$u = 2$,
		$u_2 = 1$, $u_3 = 1$,	$u = 2$,
		$u_5 = 1$,	$u = 1$.
$n = 6$ gibt	$u_1 = 6$,		$u = 6$,
	$u_1 = 4$,	$u_2 = 1$,	$u = 5$,
	$u_1 = 3$,	$u_3 = 1$,	$u = 4$,
	$u_1 = 2$,	$u_2 = 2$,	$u = 4$,
	$u_1 = 2$,	$u_4 = 1$,	$u = 3$,
	$u_1 = 1$,	$u_2 = 1$, $u_3 = 1$,	$u = 3$,
	$u_1 = 1$,	$u_5 = 1$,	$u = 2$,
		$u_2 = 3$,	$u = 3$,
		$u_2 = 1$, $u_4 = 1$,	$u = 2$,
		$u_3 = 2$,	$u = 2$,
		$u_6 = 1$	$u = 1$.

und nach der Bedeutung von U ist

$$U_0 = \alpha,\quad \left(\partial U\right)_0 = \alpha_1,\quad \left(\frac{\partial^2 U}{2!}\right)_0 = \alpha_2,\quad \left(\frac{\partial^3 U}{3!}\right)_0 = \alpha_3,\ \text{u. s. w.}$$

Wenn 1) $V = U^2$, so ist $V_0 = \alpha^2$, $\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_0 = 2\alpha$, $\frac{\partial^2 V}{\partial U^2} = 2$, $\frac{\partial^3 V}{\partial U^3} = \frac{\partial^4 V}{\partial U^4}$ etc $= 0$,

$$\text{und } U^2 = \alpha^2 + 2\alpha\alpha_1 . u + 2(\alpha\alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1^2)u^2 + 2(\alpha\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2)u^3 + 2(\alpha\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 + \tfrac{1}{2}\alpha_2^2)u^4 + \ldots$$

Wenn 2) $V = U^{\frac{i}{2}}$, so ist $V_0 = \alpha^{\frac{i}{2}}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_0 = \frac{i}{2}\alpha^{\frac{i-2}{2}}$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial U^2}\right)_0 = \frac{i}{2}\cdot\frac{i-2}{2}\alpha^{\frac{i-4}{2}}$, $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial U^3}\right)_0 = \frac{i}{2}\cdot\frac{i-2}{2}\cdot\frac{i-4}{2}\alpha^{\frac{i-6}{2}}$,

$$\text{allgemein } \left(\frac{\partial^n V}{\partial U^n}\right)_0 = \frac{i.i-2\ldots i-2(n-1)}{2^n}\alpha^{\frac{i-2n}{2}},$$

$$\text{und } U^{\frac{i}{2}} = \alpha^{\frac{i}{2}} + \tfrac{i}{2}\alpha^{\frac{i-2}{2}}\alpha_1 . u + \left(\tfrac{i}{2}\alpha^{\frac{i-2}{2}}\alpha_2 + \tfrac{i}{2}\cdot\tfrac{i-2}{2}\alpha^{\frac{i-4}{2}}\cdot\tfrac{\alpha_1^2}{2}\right)u^2 + \left(\tfrac{i}{2}\alpha^{\frac{i-2}{2}}\alpha_3 + \tfrac{i}{2}\cdot\tfrac{i-2}{2}\alpha^{\frac{i-4}{2}}.\alpha_1\alpha_2 + \tfrac{i}{2}\cdot\tfrac{i-2}{2}\cdot\tfrac{i-4}{2}\alpha^{\frac{i-6}{2}}\cdot\tfrac{\alpha_1^3}{6}\right)u^3 \ldots$$

Wenn 3) $V = \sin U$, und α oder $U_0 = 0$ ist, so hat man $V_0 = 0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_0 = 1$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial U^2}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial U^3}\right)_0 = -1$, $\left(\frac{\partial^4 V}{\partial U^4}\right)_0 = 0$, u. s. w., der Index α darf nur ungerade genommen werden, weil allgemein $\left(\frac{\partial^n V}{\partial U^n}\right)_0$ für gerade Werthe von n verschwindet, und es ergibt sich

$$\sin U = \alpha_1 u + \alpha_2 . u^2 + \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_1^3}{6}\right)u^3 + \left(\alpha_4 - \tfrac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_2\right)u^4 + \left(\alpha_5 - \tfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_2^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_3 + \frac{\alpha_1^5}{120}\right)u^5 \ldots$$

Wenn 4) $V = \cos U$, und α oder $U_0 = 0$ ist, so hat man $V_0 = 1$, $\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial U^2}\right)_0 = -1$, $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial U^3}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial^4 V}{\partial U^4}\right)_0 = 1$, u. s. f. der Index n darf nur gerade genommen werden, weil allgemein $\left(\frac{\partial^n V}{\partial U^n}\right)_0$ für ungerade Werthe von n verschwindet, und es findet sich

$$\cos U = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha_1^2 . u^2 - \alpha_1\alpha_2 u^3 - \left(\alpha_1\alpha_3 + \tfrac{1}{2}\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^4}{24}\right)u^4 - \left(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 - \frac{\alpha_1^3\alpha_2}{6}\right)u^5 \ldots$$

§30.

Wird die Formel für U^2 des vorigen § auf die Reihen (b) angewandt, so erhält man

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = T^2 + 2TP_1 . \varepsilon + 2\left(TP_2 + \tfrac{1}{2}P_1^2\right)\varepsilon^2 + 2\left(TP_3 + P_1P_2\right)\varepsilon^3 + 2\left(TP_4 + P_1P_3 + \tfrac{1}{2}P_2^2\right)\varepsilon^4 + \ldots$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = F_1^2 . \varepsilon^2 + 2F_1F_2 . \varepsilon^3 + 2\left(F_1F_3 + \tfrac{1}{2}F_2^2\right)\varepsilon^4 + \ldots$$

und, indem man addirt,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = T^2 + 2TP_1 . \varepsilon + \left(2TP_2 + P_1^2 + F_1^2\right)\varepsilon^2 + \left(2TP_3 + 2P_1P_2 + 2F_1F_2\right)\varepsilon^3 + \left(2TP_4 + 2P_1P_3 + 2F_1F_3 + P_2^2 + F_2^2\right)\varepsilon^4 + \ldots$$

So findet sich ferner, wenn man $U = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2$ oder $U^{\frac{i}{2}} = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^i$, $\alpha = T^2$, $\alpha_1 = 2TP_1$, u. s. f. setzt,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^i = T^i + iT^{i-1}P_1 . \varepsilon + \left(iT^{i-1}P_2 + \tfrac{i}{2}T^{i-2}\left((i-1)P_1^2 + F_1^2\right)\right)\varepsilon^2 + \left(iT^{i-1}P_3 + iT^{i-2}\left((i-1)P_1P_2 + F_1F_2\right) + \frac{i(i-2)}{2}T^{i-3}\left(\frac{i-1}{3}P_1^3 + P_1F_1^2\right)\right)\varepsilon^3 + \ldots$$

und, wenn man mit $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t}$ multiplicirt,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^i \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = T^{i+1} + (i+1) T^i P_1 \cdot \varepsilon + \left((i+1) T^i P_2 + \frac{i}{2} T^{i-1}\left((i+1) P_1^2 + F_1^2\right)\right)\varepsilon^2 + \left((i+1) T^i P_3 + i T^{i-1}\left((i+1) P_1 P_2 + F_1 F_2\right) + \frac{i(i-1)}{2} T^{i-2}\left(\frac{i+1}{3} P_1^3 + P_1 F_1^2\right)\right)\varepsilon^3 \ldots\ldots (c),$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^i \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = T^i F_1 \cdot \varepsilon + \left(T^i F_2 + i T^{i-1} P_1 F_1\right)\varepsilon^2 + \left(T^i F_3 + i T^{i-1}\left(P_1 F_2 + P_2 F_1\right) + \frac{i}{2} T^{i-2}\left((i-1) P_1^2 F_1 + F_1^3\right)\right)\varepsilon^2 \ldots\ldots\ldots (d).$$

Durch Differentiirung der Reihen (b) aber bekommt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial t}\cdot \varepsilon + \frac{\partial P_2}{\partial t}\cdot \varepsilon^2 + \frac{\partial P_3}{\partial t}\cdot \varepsilon^3 + \ldots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial F_1}{\partial t}\cdot \varepsilon + \frac{\partial F_2}{\partial t}\, \varepsilon^2 + \frac{\partial F_3}{\partial t}\cdot \varepsilon^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b_1)$$

Werden nun in den zwei ersten Gleichungen (E_1) für $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ die Reihen (b_1), für $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$, $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} \frac{\partial z}{\partial t}$ die Reihen (c), (d), in welchen $i-1$ statt i zu setzen ist, substituirt, so müssen sich in jeder dieser Gleichungen, da sie für jeden Werth von ε gelten müssen, die zu gleichen Potenzen von ε gehörigen Coefficienten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gegenseitig aufheben, wodurch die Gleichungen in folgende, je nach $P_1, P_2 \ldots F_1, F_2 \ldots$ lineare, Gleichungen zerfallen:

(P)

1) $\frac{\partial T}{\partial t} = -\mu T^i$,

2) $\frac{\partial P_1}{\partial t} + \mu i T^{i-1} \cdot P_1 = \frac{\partial^2 \sin b}{\partial t^2}$,

3) $\frac{\partial P_2}{\partial t} + \mu i T^{i-1} \cdot P_2 = -\mu(i-1) T^{i-2}\left(\frac{1}{2} i P_1^2 + \frac{1}{2} F_1^2\right)$,

4) $\frac{\partial P_3}{\partial t} + \mu i T^{i-1} \cdot P_3 = -\mu(i-1)\left(T^{i-2}\left(i P_1 P_2 + F_1 F_2\right) + \frac{i-2}{2} T^{i-3}\left(\frac{i}{3} P_1^3 + P_1 F_1^2\right)\right)$,

u. s. f.

(F)

1) $\frac{\partial F_1}{\partial t} + \mu T^{i-1} \cdot F_1 = \frac{\partial^2 \cos b}{\partial t^2}$,

2) $\frac{\partial F_2}{\partial t} + \mu T^{i-1} \cdot F_2 = -\mu(i-1) T^{i-2} P_1 F_1$,

3) $\frac{\partial F_3}{\partial t} + \mu T^{i-1} \cdot F_3 = -\mu(i-1)\left(T^{i-2}\left(P_1 F_2 + P_2 F_1\right) + \frac{1}{2} T^{i-3}\left((i-2) P_1^2 F_1 + F_1^3\right)\right)$,

u. s. w.

und auf die Integration dieser Gleichungen (P) und (F) ist nunmehr jene der beiden ersten Gleichungen (E_1) zurückgeführt.

§ 31.

Die erste Gleichung (P) gibt den bereits bekannten Ausdruck

$$T = \frac{f}{\left(1 + (i-1) f^{i-1} \mu t\right)^{\frac{1}{i-1}}},$$

oder, wenn zur Abkürzung τ statt $1+(i-1)f^{i-1}\mu t$ gesetzt wird, wodurch

$$\partial\tau = (i-1)f^{i-1}\mu\,\partial t, \qquad \partial t = \frac{1}{(i-1)f^{i-1}\mu}\,\partial\tau$$

wird,
$$T = \frac{f}{\tau^{\frac{1}{i-1}}}.$$

Um die Gleichung (P) 2) zu integriren, setze man nach der Methode der Variation der Constanten zuerst den Theil auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gleich Null. Dadurch wird

$$\frac{\partial P_1}{P_1} = -\frac{i}{i-1}\cdot\frac{\partial\tau}{\tau},$$

woraus durch Integration, wenn C_1 eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$\log P_1 = -\frac{i}{i-1}\log\tau + \log C_1,$$

oder

$$P_1 = \frac{C_1}{\tau^{\frac{i}{i-1}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

folgt. Setzt man diesen Werth von P_1 in die Gleichung (P) 2), und variirt die Constante C_1, so erhält man

$$-\frac{\mu i f^{i-1}\cdot C_1}{\tau^{\frac{i}{i-1}+1}} + \frac{\mu i f^{i-1}\cdot C_1}{\tau^{\frac{i}{i-1}+1}} + \frac{\frac{\partial C_1}{\partial t}}{\tau^{\frac{i}{i-1}}} = \frac{\partial^2\sin\theta}{\partial t^2},$$

d. i.
$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \tau^{\frac{i}{i-1}}\cdot\frac{\partial^2\sin\theta}{\partial t^2},$$

und durch theilweises Integriren findet sich hieraus, wenn c_1 eine andere willkürliche Constante bedeutet,

$$C_1 = c_1 + \tau^{\frac{i}{i-1}}\cdot\frac{\partial\sin\theta}{\partial t} - i\mu f^{i-1}\int\tau^{\frac{1}{i-1}}\cdot\frac{\partial\sin\theta}{\partial t}\,\partial t,$$

$$= c_1 + \tau^{\frac{i}{i-1}}\cdot\frac{\partial\sin\theta}{\partial t} - i\mu f^{i-1}\tau^{\frac{1}{i-1}}\sin\theta + i\mu^2 f^{2i-2}\tau^{\frac{2-i}{i-1}}\int\sin\theta\,\partial t - i(2-i)\mu^3 f^{3i-3}\tau^{\frac{3-2i}{i-1}}\iint\sin\theta\,\partial t^2$$

$$+\, i(2-i)(3-2i)\mu^4 f^{4i-4}\int\left(\tau^{\frac{4-3i}{i-1}}\iint\sin\theta\,\partial t^2\right)\partial t.$$

Nach §29 muß $P_1 = 0$ seyn für $t = 0$, daher vermöge der Gleichung (c) auch C_1 mit t zugleich verschwinden; und da (§26) ebenfalls der Winkel θ im Anfange der Bewegung gleich Null ist, so muß, wenn auch die Integrale $\int\sin\theta\,\partial t$, $\iint\sin\theta\,\partial t^2$ etc. so genommen werden, daß sie für $t = 0$ verschwinden, die Constante c_1 dem Werthe, den $-\frac{\partial\sin\theta}{\partial t}$, d. i. $-\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}$, für $t = 0$ bekommt, gleich, oder $= -h$ seyn. Wird ferner C_1 durch $\tau^{\frac{i}{i-1}}$ dividirt, so ergibt sich

$$P_1 = \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - \frac{h}{\tau^{\frac{i}{i-1}}} - \frac{i\mu f^{i-1}}{\tau}\sin\theta + \frac{i\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2}\int\sin\theta\, dt - \frac{i(2-i)\mu^3 f^{3i-3}}{\tau^3}\iint\sin\theta\, dt^2 + \frac{i(2-i)(3-2i)\mu^4 f^{4i-4}}{\tau^{\frac{i}{i-1}}}\int\left(\tau^{\frac{4-3i}{i-1}}\iint\sin\theta\, dt^2\right)dt. \text{(*)}$$

Wird nach derselben Integrations-Methode in der Gleichung (F) 1) das Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vorerst außer Acht gelassen, so hat man

$$\frac{\partial F_1}{F_1} = -\frac{1}{i-1}\cdot\frac{\partial\tau}{\tau},$$

woraus, wenn K_1 die bei der Integration eingehende willkürliche Constante bedeutet,

$$\log F_1 = -\frac{1}{i-1}\log\tau + \log K_1,$$

oder

$$F_1 = \frac{K_1}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (F)$$

hervorgeht. Indem man F_1 in der Gleichung (F) 1) so nimmt und K_1 variirt, gibt diese Gleichung

$$-\frac{\mu f^{i-1}\cdot K_1}{\tau^{\frac{1}{i-1}+1}} + \frac{\mu f^{i-1}\cdot K_1}{\tau^{\frac{1}{i-1}+1}} + \frac{\frac{\partial K_1}{\partial t}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} = \frac{\partial^2\cos\theta}{\partial t^2},$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial K_1}{\partial t} = \tau^{\frac{1}{i-1}}\cdot\frac{\partial^2\cos\theta}{\partial t^2}.$$

Wird theilweise integrirt, und eine andere Constante k_1 eingeführt, so erhält man hieraus

$$K_1 = k_1 + \tau^{\frac{1}{i-1}}\cdot\frac{\partial\cos\theta}{\partial t} - \mu f^{i-1}\int\tau^{\frac{2-i}{i-1}}\cdot\frac{\partial\cos\theta}{\partial t}\partial t,$$

$$= k_1 + \tau^{\frac{1}{i-1}}\cdot\frac{\partial\cos\theta}{\partial t} - \mu f^{i-1}\tau^{\frac{2-i}{i-1}}\cdot\cos\theta + (2-i)\mu^2 f^{2i-2}\tau^{\frac{3-2i}{i-1}}\cdot\int\cos\theta\, dt - (2-i)(3-2i)\mu^3 f^{3i-3}\tau^{\frac{4-3i}{i-1}}\cdot\iint\cos\theta\, dt^2$$

$$+ (2-i)(3-2i)(4-3i)\mu^4 f^{4i-4}\int\left(\tau^{\frac{5-4i}{i-1}}\iint\cos\theta\, dt^2\right)dt.$$

Die Integral-Ausdrücke $\int\cos\theta\, dt$, $\iint\cos\theta\, dt^2$, etc. werden auf solche Art bestimmt gedacht, daß sie zugleich mit t zu Null werden; und weil nach der Voraussetzung θ gleichfalls mit t verschwindet, aber auch F_1, und nach (F) ferner K_1, mit t verschwinden sollen, so wird $\frac{\partial\cos\theta}{\partial t} = 0$ für $t = 0$, und muß $k_1 = \mu f^{i-1}$ seyn. Wird dann K_1 durch $\tau^{\frac{1}{i-1}}$ dividirt, so erhält man

$$F_1 = \frac{\partial\cos\theta}{\partial t} + \frac{\mu f^{i-1}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} - \frac{\mu f^{i-1}}{\tau}\cos\theta + \frac{(2-i)\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2}\int\cos\theta\, dt - \frac{(2-i)(3-2i)\mu^3 f^{3i-3}}{\tau^3}\iint\cos\theta\, dt^2$$

$$+ \frac{(2-i)(3-2i)(4-3i)\mu^4 f^{4i-4}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}}\int\left(\tau^{\frac{5-4i}{i-1}}\iint\cos\theta\, dt^2\right)dt. \text{(*)}$$

(*) Es ist $\frac{h}{\tau^{\frac{i}{i-1}}} = h\left(1-\frac{(i-1)\mu f^{i-1}t}{\tau}\right)^{\frac{i}{i-1}}$ und $\frac{\mu f^{i-1}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} = \frac{\mu f^{i-1}}{\tau}\left(1-\frac{(i-1)\mu f^{i-1}t}{\tau}\right)^{\frac{2-i}{i-1}}$. Werden diese Glieder von P_1 und F_1 entwickelt, so ergibt sich, daß, für $\theta = kt$, der Coefficient P_1 durch k^3, F_1 durch k^2 theilbar ist.

Die für C_1 und R_1 gefundenen Reihen brechen bei fortgesetztem theilweisen Integriren, daher auch die Ausdrücke für $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{F}_1$, ab, wenn der Bruch $\frac{i}{i-1}$, welcher nicht gleich 1 seyn kann, eine größere positive ganze Zahl, d. i. wenn $i=2$ oder $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$ u. s. w. ist. Für andere Werthe von i dagegen ergeben sich $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ nur in Gestalt unendlicher Reihen.

§32.

Nachdem die Functionen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ entwickelt sind, findet man auf demselben Wege

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{C_2}{\tau^{\frac{i}{i-1}}}, \text{ und } \frac{\partial C_2}{\partial t} = -\mu(i-1) f^{i-2}\, \tau^{\frac{2}{i-1}} \left(\tfrac{1}{2} i \mathfrak{P}_1^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2\right),$$

daher $$\mathfrak{P}_2 = -\frac{\mu(i-1) f^{i-2}}{\tau^{\frac{i}{i-1}}} \int \tau^{\frac{2}{i-1}} \left(\tfrac{i}{2} \mathfrak{P}_1^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2\right) \partial t;$$

ferner $$\mathfrak{F}_2 = \frac{R_2}{\tau^{\frac{1}{i-1}}}, \text{ und } \frac{\partial R_2}{\partial t} = -\mu(i-1) f^{i-2}\, \tau^{\frac{3-i}{i-1}}.\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{F}_1,$$

daher $$\mathfrak{F}_2 = -\frac{\mu(i-1) f^{i-2}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} \int \tau^{\frac{3-i}{i-1}}.\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{F}_1 \partial t;$$

u. s. w. f.

Die Reihen (b) des §29 stellen sich hiernach in folgender Gestalt dar. Es ist, wenn τ die Bedeutung von $1+(i-1)\mu f^{i-1} t$ hat,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{f}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} &+ \varepsilon \left(\frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - \frac{h}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} - \frac{i\mu f^{i-1}}{\tau} \sin\theta + \frac{i\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2} \int \sin\theta\, \partial t - \frac{i(2-i)\mu^3 f^{3i-3}}{\tau^3} \iint \sin\theta\, \partial t^2 \ldots \right) \\ &- \varepsilon^2 . \frac{\mu(i-1) f^{i-2}}{\tau^{\frac{i}{i-1}}} \int \tau^{\frac{2}{i-1}} \left(\tfrac{i}{2} \mathfrak{P}_1^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2 \right) \partial t \\ &- \varepsilon^3 . \frac{\mu(i-1) f^{i-3}}{\tau^{\frac{i}{i-1}}} \int \tau^{\frac{3}{i-1}} \left(\frac{f}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} \left(i \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \right) + \frac{i-2}{2} \left(\tfrac{i}{3} \mathfrak{P}_1^3 + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{F}_1^2 \right) \right) \partial t \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (G)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon &\left(\frac{\partial \cos\theta}{\partial t} + \frac{\mu f^{i-1}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} - \frac{\mu f^{i-1}}{\tau} \cos\theta + \frac{(2-i)\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2} \int \cos\theta\, \partial t - \frac{(2-i)(3-2i)\mu^3 f^{3i-3}}{\tau^3} \iint \cos\theta\, \partial t^2 \ldots \right) \\ &- \varepsilon^2 . \frac{\mu(i-1) f^{i-2}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} \int \tau^{\frac{3-i}{i-1}} .\, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{F}_1 \partial t \\ &- \varepsilon^3 . \frac{\mu(i-1) f^{i-3}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} \int \tau^{\frac{4-i}{i-1}} \left(\frac{f}{\tau^{\frac{1}{i-1}}} \left(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{P}_2 \right) + \frac{i-2}{2} \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{F}_1 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{F}_1^3 \right) \partial t \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (H)$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \ldots$ der Kürze wegen die bereits bekannten Functionen vorstellen, und alle mit $\int$ bezeichneten Integrale so zu nehmen sind, daß sie für $t=0$ verschwinden.

§33.

Nach der Form der für $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ (§29) gewonnenen Reihen hat man

$$x = \int T\partial t + \varepsilon\int P_1\partial t + \varepsilon^2\int P_2\partial t + \varepsilon^3\int P_3\partial t + \ldots\ldots$$
$$z = \qquad\qquad \varepsilon\int F_1\partial t + \varepsilon^2\int F_2\partial t + \varepsilon^3\int F_3\partial t + \ldots\ldots$$

Das Integral $\int T\partial t$ ist nach §27 $= \frac{\tau^{\frac{i-2}{i-1}}-1}{(i-2)f^{i-2}\mu}$, und die Integrale $\int P_1\partial t$, $\int P_2\partial t \ldots$ $\int F_1\partial t \ldots$ sind ebenfalls so zu bestimmen, dass sie zugleich mit t zu Null werden.

Vermöge der Gleichungen (P), (F) des §30 sind aber mit $P_1, P_2 \ldots F_1, F_2 \ldots$ in ähnlicher Form zugleich auch unmittelbar $\int P_1\partial t$, $\int P_2\partial t \ldots \int F_1\partial t$, $\int F_2\partial t \ldots$ gegeben.

Bedeutet nämlich allgemein P_n die in irgend einer der Gleichungen (P) 1), 2), 3) ... des §30 enthaltene Function $P_1, P_2 \ldots$, und Q_n den rechts vom Zeichen = stehenden Theil der Gleichung, so hat man vermöge dieser Gleichung

$$P_n = -\frac{\tau}{i\mu f^{i-1}}\left(\frac{\partial P_n}{\partial t} - Q_n\right).$$

Hieraus folgt, indem man theilweise integrirt,

$$\int P_n\partial t = -\frac{\tau}{i\mu f^{i-1}}\left(P_n - \int Q_n\partial t\right) + \frac{i-1}{i}\left(\int P_n\partial t - \iint Q_n\partial t^2\right),$$
oder $$\frac{1}{i}\int P_n\partial t = -\frac{i-1}{i}\iint Q_n\partial t^2 - \frac{\tau}{i\mu f^{i-1}}\left(P_n - \int Q_n\partial t\right),$$

und, indem man mit i multiplicirt,

$$\int P_n\partial t = -(i-1)\iint Q_n\partial t^2 - \frac{\tau}{\mu f^{i-1}}\left(P_n - \int Q_n\partial t\right) \text{ oder auch } = -\frac{\tau}{\mu f^{i-1}}P_n + \frac{1}{\mu f^{i-1}}\int \tau Q_n\partial t,$$

wo die Ausdrücke $\int Q_n\partial t$, $\iint Q_n\partial t^2$ &c. wieder als mit t zugleich verschwindend gedacht sind.

Wenn z. B. $P_n = P_1$, so ist $Q_n = \frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2}$, $\int Q_n\partial t = \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - h$, $\iint Q_n\partial t^2 = \sin\theta - ht$, und man hat

$$\int P_1\partial t = -(i-1)(\sin\theta - ht) - \frac{\tau}{\mu f^{i-1}}\left(P_1 - \frac{\partial\sin\theta}{\partial t} + h\right),$$
$$= \sin\theta - \frac{h}{\mu f^{i-1}}\left(1 - \frac{1}{\tau^{\frac{1}{i-1}}}\right) - \frac{i\mu f^{i-1}}{\tau}\int\sin\theta\partial t + \frac{i(2-i)\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2}\iint\sin\theta\partial t^2 - \frac{i(2-i)(3-2i)\mu^3 f^{3i-3}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}}\int\left(\tau^{\frac{4-3i}{i-1}}\iint\sin\theta\partial t^2\right)\partial t.$$

Eben so gibt jede der Gleichungen (F), wenn allgemein F_n eine der Functionen $F_1, F_2 \ldots$, und R_n den rechts vom Zeichen = stehenden Theil der Gleichung vorstellt,

$$F_n = -\frac{\tau}{\mu f^{i-1}}\left(\frac{\partial F_n}{\partial t} - R_n\right).$$

Hieraus ergibt sich durch theilweises Integriren

$$\int F_n\,\partial t = -\frac{\tau}{\mu f^{i-1}}\left(F_n - \int R_n\,\partial t\right) + (i-1)\left(\int F_n\,\partial t - \iint R_n\,\partial t^2\right),$$

oder $(2-i)\int F_n\,\partial t = -(i-1)\iint R_n\,\partial t^2 - \frac{\tau}{\mu f^{i-1}}\left(F_n - \int R_n\,\partial t\right)$,

und, indem man durch $2-i$ dividirt,

$$\int F_n\,\partial t = -\frac{i-1}{2-i}\iint R_n\,\partial t^2 - \frac{\tau}{(2-i)\mu f^{i-1}}\left(F_n - \int R_n\,\partial t\right) \text{ oder auch } = -\frac{\tau}{(2-i)\mu f^{i-1}} F_n + \frac{1}{(2-i)\mu f^{i-1}}\int \tau R_n\,\partial t.$$

Die Integrale sind auch hier so zu nehmen, daß sie mit t zugleich verschwinden.

Wenn z. B. $F_n = F_1$, so ist $R_n = \frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2}$, $\int R_n\,\partial t = \frac{\partial \cos\theta}{\partial t}$, $\iint R_n\,\partial t^2 = \cos\theta - 1$, und man erhält

$$\int F_1\,\partial t = \cos\theta + \frac{1}{2-i}\left(i-1-\frac{1}{\tau^{\frac{2-i}{i-1}}}\right) - \frac{\mu f^{i-1}}{\tau}\int\cos\theta\,\partial t + \frac{(3-2i)\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2}\iint\cos\theta\,\partial t^2 - \frac{(3-2i)(4-3i)\mu^3 f^{3i-3}}{\tau^{\frac{2-i}{i-1}}}\int\left(\tau^{\frac{4-2i}{i-1}}\iint\cos\theta\,\partial t^2\right)\partial t.$$

Demnach ist

$$\left.\begin{aligned} x = {} & \frac{\tau^{\frac{i-2}{i-1}}-1}{(i-2)f^{i-2}\mu} + \varepsilon\left(\sin\theta - \frac{h}{\mu f^{i-1}}\left(1-\frac{1}{\tau^{\frac{1}{i-1}}}\right) - \frac{i\mu f^{i-1}}{\tau}\int\sin\theta\,\partial t - \frac{i(i-2)\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2}\iint\sin\theta\,\partial t^2 \ldots\right) \\ & -\varepsilon^2\left(\frac{\tau}{\mu f^{i-1}}P_2 + \frac{i-1}{f}\int\tau^{\frac{1}{i-1}}\left(\frac{i}{2}P_1^2 + \frac{1}{2}F_1^2\right)\partial t\right) \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (G_1)$$

$$\left.\begin{aligned} z = {} & \varepsilon\left(\cos\theta\,\frac{i-1-\tau^{\frac{i-2}{i-1}}}{i-2} - \frac{\mu f^{i-1}}{\tau}\int\cos\theta\,\partial t + \frac{(3-2i)\mu^2 f^{2i-2}}{\tau^2}\iint\cos\theta\,\partial t^2 \ldots\right) \\ & +\varepsilon^2\left(\frac{\tau}{(i-2)\mu f^{i-1}}F_2 + \frac{i-1}{(i-2)f}\int\tau^{\frac{1}{i-1}}P_1 F_1\,\partial t\right) \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (H_1)$$

wenn alle durch das Zeichen $\int$ angedeuteten Integral-Ausdrücke so genommen werden, daß sie zugleich mit t verschwinden.

§ 34.

Der Widerstands-Exponent i ist bis hieher ganz allgemein gedacht, so daß er jede positive und negative, ganze und gebrochene Zahl bedeuten kann (§ 11). Gewisse besondere Werthe von i machen indessen einige Erläuterungen nothwendig.

Der Fall $i = 1$ erfordert, da die Reihen (G), (H), (G_1), (H_1) auf ihn keine Anwendung gestatten, eine besondere Entwickelung. Die Gleichungen (a) des § 27 werden für diesen Fall

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Die erste gibt $\frac{\partial x}{\partial t} = f.\, e^{-\mu t}$, wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet. Setzt man daher

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f.\, e^{-\mu t} + P.\varepsilon,$$

so hat man $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\mu f.\, e^{-\mu t} + \frac{\partial P}{\partial t}.\varepsilon$, und erhält aus der ersten Gleichung (E,) des §26 durch Substitution dieser Werthe

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu P = \frac{\partial \sin\theta}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Nach der im §31 angewendeten Integrations-Methode findet man zuerst aus $\frac{\partial P}{\partial t} + \mu P = 0$

$$P = C.\, e^{-\mu t},$$

dann aus (g) $\quad \frac{\partial C}{\partial t} = e^{\mu t}.\, \frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2}$,

und hieraus durch theilweises Integriren

$$C = e^{\mu t}.\, \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - h - \mu e^{\mu t}.\, \sin\theta + \mu^2 e^{\mu t} \int \sin\theta\, \partial t - \mu^3 e^{\mu t} \iint \sin\theta\, \partial t^2 + \mu^4 \int\left(e^{\mu t} \iint \sin\theta\, \partial t^2\right) \partial t;$$

somit $P = \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - h.\, e^{-\mu t} - \mu \sin\theta + \mu^2 \int \sin\theta\, \partial t - \mu^3 \iint \sin\theta\, \partial t^2 + \mu^4.\, e^{-\mu t} \int\left(e^{\mu t} \iint \sin\theta\, \partial t^2\right) \partial t$,

und $\frac{\partial x}{\partial t} = f.\, e^{-\mu t} + \varepsilon\left(\frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - h.\, e^{-\mu t} - \mu \sin\theta + \mu^2 \int \sin\theta\, \partial t \ldots\right)$.

Und weil nach (g) $P = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2}\right)$ ist, so ist

$$\int P\, \partial t = -\frac{1}{\mu}\left(P - \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} + h\right) = -\frac{1}{\mu} h (1 - e^{-\mu t}) + \sin\theta - \mu \int \sin\theta\, \partial t + \mu^2 \iint \sin\theta\, \partial t^2 - \mu^3 e^{-\mu t} \int\left(e^{\mu t} \iint \sin\theta\, \partial t^2\right) \partial t,$$

und $x = \frac{f}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) + \varepsilon\left(\sin\theta - \frac{h}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) - \mu \int \sin\theta\, \partial t + \mu^2 \iint \sin\theta\, \partial t^2 \ldots\right)$.

Eben so bekommt man, indem man $\frac{\partial z}{\partial t}$, welches, wenn $\varepsilon = 0$ ist, für jeden Werth von t gleich Null seyn muß (§27), gleich $F.\varepsilon$ annimmt, aus der zweiten Gleichung (E,)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mu F = \frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

Hieraus folgt

$$F = R.\, e^{-\mu t}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = e^{\mu t}.\, \frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2},$$

und durch theilweises Integriren

$$K = e^{\mu t}\frac{\partial\cos\theta}{\partial t} + \mu(1 - e^{\mu t}\cos\theta) + \mu^2 e^{\mu t}\int\cos\theta\,\partial t - \mu^3 e^{\mu t}\iint\cos\theta\,\partial t^2 + \mu^4\int\left(e^{\mu t}\iint\cos\theta\,\partial t^2\right)\partial t,$$

ferner $F = \frac{\partial\cos\theta}{\partial t} + \mu(e^{-\mu t} - \cos\theta) + \mu^2\int\cos\theta\,\partial t - \mu^3\iint\cos\theta\,\partial t^2 + \mu^4 e^{-\mu t}\int\left(e^{\mu t}\iint\cos\theta\,\partial t^2\right)\partial t,$

oder $\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon\left(\frac{\partial\cos\theta}{\partial t} + \mu(e^{-\mu t} - \cos\theta) + \mu^2\int\cos\theta\,\partial t \dots\dots\right).$

Und weil nach der Gleichung (h) $F = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial^2\cos\theta}{\partial t^2}\right)$ ist, so ist

$$\int F\,\partial t = -\frac{1}{\mu}\left(F - \frac{\partial\cos\theta}{\partial t}\right) = \cos\theta - e^{-\mu t} - \mu\int\cos\theta\,\partial t + \mu^2\iint\cos\theta\,\partial t^2 - \mu^3 e^{-\mu t}\int\left(e^{\mu t}\iint\cos\theta\,\partial t^2\right)\partial t,$$

oder $z = \varepsilon\left(\cos\theta - e^{-\mu t} - \mu\int\cos\theta\,\partial t + \mu^2\iint\cos\theta\,\partial t^2 \dots\dots\right).$

Wie bisher sind hier wieder die Integrale $\int\sin\theta\,\partial t$, $\iint\sin\theta\,\partial t^2$, $\int\cos\theta\,\partial t$ als mit t verschwindend zu betrachten.

Wenn $i = 2$ ist, so geht in der Gleichung (G_1), wie aus §27 bekannt ist, das Glied $\frac{\tau^{\frac{i-2}{i-1}} - 1}{(i-2)f^{i-2}\mu}$ in $\frac{1}{\mu}\log(1+\mu f t)$ über, und auf ähnliche Weise verwandelt sich in der Gleichung (H_1) das Glied $\frac{i - 1 - \tau^{\frac{i-2}{i-1}}}{i-2}$ des Coefficienten von ε, wenn man den Zähler nach §28 entwickelt und dann mit $i-2$ dividirt, in $1 - \log(1+\mu f t)$. Übrigens bedarf dieser Fall, was die Integrale $\int F_2\,\partial t$, $\int F_3\,\partial t$... betrifft, ebenfalls einer besonderen Behandlung (§44 u. folg.).

Negative Werthe des Exponenten i sind, wenigstens wenn der Ausdruck für den Widerstand $\frac{n\mathfrak{D}bV^i}{g c}$ (§1) als aus einem einzigen Gliede bestehend vorausgesetzt wird, als unzulässig zu betrachten, weil, wenn i negativ wäre, der Widerstand bei kleinerer Geschwindigkeit größer seyn müßte als bei größerer, was offenbar gegen die Erfahrung streitet.

Nimmt man dagegen $i = 0$ oder den Widerstand als unabhängig von der Geschwindigkeit an, so ist nach §16 der Widerstand gegen die vordere Halbkugel gleich $\frac{n\mathfrak{D}\pi b^2}{g}$, und die Gleichungen (G) (H_1) geben für diesen Fall

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f - \mu t + \varepsilon\left(\frac{\partial\sin\theta}{\partial t} - h\right) + \varepsilon^2\cdot\frac{\mu}{2}\int\left(\frac{F_1}{f-\mu t}\right)^2\partial t + \varepsilon^3\cdot\mu\int\left(\frac{F_1F_2}{(f-\mu t)^2} - \frac{\Phi_1F_1^2}{(f-\mu t)^3}\right)\partial t \dots\dots,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon\left(\frac{\partial\cos\theta}{\partial t} + \mu\frac{f-\mu t}{f^2} - \frac{\mu}{f-\mu t}\cos\theta + 2\left(\frac{\mu}{f-\mu t}\right)^2\int\cos\theta\,\partial t \dots\right) + \varepsilon^2\cdot\mu(f-\mu t)\int\frac{\Phi_1F_1}{(f-\mu t)^3}\partial t \dots\dots,$$

$$x = ft - \tfrac{1}{2}\mu t^2 + \varepsilon(\sin\theta - ht) + \varepsilon^2\cdot\frac{\mu}{2}\iint\left(\frac{F_1}{f-\mu t}\right)^2\partial t^2 \dots\dots,$$

$$z = \varepsilon\left(\cos\theta - 1 + \mu\frac{ft - \frac{1}{2}\mu t^2}{f^2} - \frac{\mu}{f-\mu t}\int\cos\theta\,\partial t + 3\left(\frac{\mu}{f-\mu t}\right)^2\iint\cos\theta\,\partial t^2 \dots\right) + \varepsilon^3\mu\int(f-\mu t)\left(\int\frac{\Phi_1F_1}{(f-\mu t)^3}\partial t\right)\partial t \dots$$

§35.

Wird nun angenommen, der Ausdruck für den Widerstand $\frac{n\Delta b v^i}{g}$ bestehe aus drei Gliedern, in welchen der Exponent i die Werthe 0, 1, 2 hat, so erscheinen die Gleichungen (E.) in folgender Gestalt.

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \varepsilon\,\frac{\partial^2 \sin b}{\partial t^2} - \left(\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}\frac{\partial s}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}, \\
2)\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \varepsilon\,\frac{\partial^2 \cos b}{\partial t^2} - \left(\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}\frac{\partial s}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t}, \\
3)\ \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{\varrho}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cos b - \frac{\partial z}{\partial t}\sin b\right)\left(\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}\frac{\partial s}{\partial t}\right).
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (F)$$

Nach §27 müßte, wenn $\varepsilon = 0$ wäre, wieder $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ seyn für jeden Werth von t.

Um die Gleichungen 1) und 2) zu integriren, setze man daher abermals, wie im §29,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = T + P_1\varepsilon + P_2\varepsilon^2 + P_3\varepsilon^3 + \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F_1\varepsilon + F_2\varepsilon^2 + F_3\varepsilon^3 + \ldots\ldots$$

Wird in den Gleichungen (c) und (d) des §30 der Exponent i nach der Reihe gleich $-1, 0, +1$ gesetzt, so hat man

$$\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \mu + \varepsilon^2\left(-\tfrac{1}{2}\mu F_1^2 T^{-2}\right) + \varepsilon^3\left(-\mu F_1 F_2 T^{-2} + \mu P_1 F_1^2 T^{-3}\right)\ldots\ldots$$

$$\mu_{,}\frac{\partial x}{\partial t} = \mu_{,}T + \varepsilon\,\mu_{,}P_1 + \varepsilon^2\,\mu_{,}P_2 + \varepsilon^3\,\mu_{,}P_3\ \ldots\ldots$$

$$\mu_{,,}\frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \mu_{,,}T^2 + \varepsilon\,2\mu_{,,}TP_1 + \varepsilon^2\mu_{,,}\left(2TP_2 + P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2\right) + \varepsilon^3\mu_{,,}\left(2TP_3 + 2P_1P_2 + F_1F_2\right)\ldots\ldots$$

$$\left(\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}\frac{\partial s}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t} = \mu + \mu_{,}T + \mu_{,,}T^2 + \varepsilon\left(\mu_{,}P_1 + 2\mu_{,,}TP_1\right) + \varepsilon^2\left(-\tfrac{1}{2}\mu F_1^2T^{-2} + \mu_{,}P_2 + \mu_{,,}\left(2TP_2 + P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2\right)\right)$$

$$+\ \varepsilon^3\left(-\mu F_1F_2T^{-2} + \mu P_1F_1^2T^{-3} + \mu_{,}P_3 + \mu_{,,}\left(2TP_3 + 2P_1P_2 + F_1F_2\right)\right)\ldots\ldots$$

$$\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon\,\mu F_1T^{-1} + \varepsilon^2\,\mu\left(F_2T^{-1} - P_1F_1T^{-2}\right) + \varepsilon^3\,\mu\left(F_3T^{-1} - \left(P_1F_2 + P_2F_1\right)T^{-2} + \left(P_1^2F_1 - \tfrac{1}{2}F_1^3\right)T^{-3}\right)\ldots$$

$$\mu_{,}\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon\,\mu_{,}F_1 + \varepsilon^2\,\mu_{,}F_2 + \varepsilon^3\,\mu_{,}F_3\ \ldots\ldots$$

$$\mu_{,,}\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon\mu_{,,}TF_1 + \varepsilon^2\mu_{,,}\left(TF_2 + P_1F_1\right) + \varepsilon^3\mu_{,,}\left(TF_3 + P_1F_2 + P_2F_1 + \tfrac{1}{2}F_1^3T^{-1}\right)\ldots\ldots$$

$$\left(\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}\frac{\partial s}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon F_1\left(\mu T^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}T\right) + \varepsilon^2\left(F_2\left(\mu T^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}T\right) - P_1F_1\left(\mu T^{-2} - \mu_{,,}\right)\right)$$

$$+\ \varepsilon^3\left(F_3\left(\mu T^{-1} + \mu_{,} + \mu_{,,}T\right) - \left(P_1F_2 + P_2F_1 + \tfrac{1}{2}F_1^3T^{-1}\right)\left(\mu T^{-2} - \mu_{,,}\right) + \mu P_1^2F_1T^{-3}\right)\ldots\ldots$$

und weil $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial t}.\varepsilon + \frac{\partial P_2}{\partial t}.\varepsilon^2 + \frac{\partial P_3}{\partial t}.\varepsilon^3 \dots$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F_1}{\partial t}.\varepsilon + \frac{\partial F_2}{\partial t}.\varepsilon^2 + \frac{\partial F_3}{\partial t}.\varepsilon^3 \dots$$

ist, so zerfallen die zwei ersten Gleichungen (F), in deren jeder die zu gleichen Potenzen von ε gehörigen Coefficienten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich seyn müssen, in folgende, je nach $P_1, P_2 \dots F_1, F_2 \dots$ lineare, Gleichungen:

(P_1)

1) $\frac{\partial T}{\partial t} = -\mu - \mu_{,} T - \mu_{,,} T^2$,

2) $\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\mu_{,} + 2\mu_{,,} T) P_1 = \frac{\partial^2 \sin b}{\partial t^2}$,

3) $\frac{\partial P_2}{\partial t} + (\mu_{,} + 2\mu_{,,} T) P_2 = \frac{1}{2} F_1^2 \left(\frac{\mu}{T^3} - \mu_{,,}\right) - \mu_{,,} P_1^2$,

4) $\frac{\partial P_3}{\partial t} + (\mu_{,} + 2\mu_{,,} T) P_3 = F_1 F_2 \left(\frac{\mu}{T^3} - \mu_{,,}\right) - \mu \frac{P_1 F_1^2}{T^3} - 2\mu_{,,} P_1 P_2$,

u. s. f.

(F_1)

1) $\frac{\partial F_1}{\partial t} + \left(\frac{\mu}{T} + \mu_{,} + \mu_{,,} T\right) F_1 = \frac{\partial^2 \cos b}{\partial t^2}$,

2) $\frac{\partial F_2}{\partial t} + \left(\frac{\mu}{T} + \mu_{,} + \mu_{,,} T\right) F_2 = P_1 F_1 \left(\frac{\mu}{T^3} - \mu_{,,}\right)$,

3) $\frac{\partial F_3}{\partial t} + \left(\frac{\mu}{T} + \mu_{,} + \mu_{,,} T\right) F_3 = \left(P_1 F_2 + P_2 F_1 + \frac{1}{2}\frac{F_1^3}{T}\right)\left(\frac{\mu}{T^3} - \mu_{,,}\right) + \mu \frac{P_1^2 F_1}{T^3}$,

u. s. w.

§36.

Die Zeit-Functionen $T, P_1, P_2 \dots : F_1, F_2 \dots$ sind wie im §29 so zu bestimmen, daß T gleich f und die übrigen gleich Null werden für $t = 0$.

Nach der Gleichung (P_1) 1) hat man

$$-\partial t = \frac{\partial T}{\mu + \mu_{,} T + \mu_{,,} T^2},$$

und erhält hieraus durch Integration nach den bekannten Formeln, indem man zur Abkürzung die (als positiv gedachte) Größe $\sqrt{\frac{1}{4}\mu_{,}^2 - \mu\mu_{,,}}$ mit λ, und $\sqrt{\mu\mu_{,,} - \frac{1}{4}\mu_{,}^2}$ oder $\lambda\sqrt{-1}$ mit λ' bezeichnet,

$$T = \frac{f\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) - (\mu + \frac{1}{2}\mu_{,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})}{\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})},$$ in dem Falle, wenn $\frac{1}{4}\mu_{,}^2 > \mu\mu_{,,}$,

$$= \frac{f\lambda' \cos \lambda' t - (\mu + \frac{1}{2}\mu_{,} f) \sin \lambda' t}{\lambda' \cos \lambda' t + (\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f) \sin \lambda' t},$$ in dem Falle, wenn $\frac{1}{4}\mu_{,}^2 < \mu\mu_{,,}$,

$$= \frac{f - (\mu + \frac{1}{2}\mu_{,} f)t}{1 + (\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)t},$$ in dem Falle, wenn $\frac{1}{4}\mu_{,}^2 = \mu\mu_{,,}$ ist.

Auf die bekannte Weise geht der Ausdruck des ersten Falles in den des zweiten Falles, oder dieser in jenen, über, wenn man im ersten $\lambda\sqrt{-1}$ statt λ, oder im zweiten $\lambda\sqrt{-1}$ statt λ' setzt; und aus beiden Ausdrücken geht der des dritten Falles hervor, wenn man nach vorangegangener Entwickelung Zähler und Nenner durch λ oder λ' weg-dividirt, und hierauf λ oder λ' gleich Null setzt.

Um aus der Gleichung $(P_{,}\ 1)$ die Function $P_{,}$ darzustellen, werde zuerst

$$\frac{\partial P_{,}}{\partial t} + (\mu_{,} + 2\mu_{,,} T) P_{,} = 0$$

gesetzt. Man findet, wenn man den Ausdruck für T des Falles $\frac{1}{4}\mu_{,}^2 > \mu\mu_{,,}$ nimt,

$$\frac{\partial P_{,}}{P_{,}} = -2\,\frac{\lambda^2(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) + \lambda(\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})}{\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})}\,\partial t,$$

und hieraus durch Integration

$$\log P_{,} = -2\log\left(\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right) + \log C_{,},$$

oder
$$P_{,} = \frac{C_{,}}{\left(\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

Nimt man nun $C_{,}$ als veränderlichen, so gibt die Gleichung $(P_{,}\ 1)$

$$\frac{\partial C_{,}}{\partial t} = \left(\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2},$$

woraus durch theilweises Integriren, indem man die wieder eingehende Constante vermöge (k) so bestimmt, daß für $t = 0$ auch $C_{,}$, so wie $P_{,}$, gleich Null wird,

$$C_{,} = \left(\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right)^2 \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - 4\lambda^2 h - 2\lambda\left(\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right)\left(\lambda(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})\right)\sin\theta$$

$$+ 4\lambda^2\left(\left(\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right)^2 + 2(\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f - \lambda)\right)\int \sin\theta\,\partial t$$

$$- 8\lambda^3 \int\left(\left(\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})\right)\left(\lambda(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) + (\tfrac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})\right)\int \sin\theta\,\partial t\right)\partial t,$$

und, wenn man zur Abkürzung

U anstatt $\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})$,

$U_{,}$ anstatt $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial t}$ oder statt $\lambda(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) + (\frac{1}{2}\mu_{,} + \mu_{,,} f)(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})$

einführt,

$$P_1 = \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} - \frac{2\lambda^2 h}{U^2} - 2\lambda \frac{U_1}{U} \sin\theta + 4\lambda^2\left(1+2\frac{\frac{1}{2}\mu_1+\mu_{11}f-\lambda}{U^2}\right)\int \sin\theta\,\partial t - \frac{8\lambda^3}{U^2}\int\left(U U_1 \int \sin\theta\,\partial t\right)\partial t \;\ldots\ldots (l)$$

folgt.

§ 37.

Nach derselben Methode werde, um aus der Gleichung (F_1) 1) den Coefficienten F_1 zu entwickeln, zuerst

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \left(\frac{\mu}{T} + \mu_1 + \mu_{11} T\right) F_1 = 0$$

angenommen. Unter dieser Voraussetzung ist vermöge der Gleichung (P_1) 1)

$$\frac{\partial F_1}{F_1} = \frac{\partial T}{T},$$

und wenn K_1 die bei der Integration eingehende willkürliche Constante bezeichnet,

$$F_1 = K_1 . T.$$

Wird in der Gleichung (F_1) 1) die Function F_1 so genommen und K_1 variirt, so giebt diese Gleichung

$$\frac{\partial K_1}{\partial t} = \frac{1}{T}\,\frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2},$$

und es muß bei der Integration, weil für $t=0$ die Größe F_1 verschwinden soll, T aber gleich Eins wird, K_1 so bestimmt werden, daß es mit t zugleich zu Null wird.

Es ergibt sich demnach, indem man theilweise integrirt,

$$K_1 = \frac{1}{T}\frac{\partial \cos\theta}{\partial t} - \frac{4\lambda^2(\mu+\mu_1 f+\mu_{11}f^2)}{\left(f\lambda(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})\right)^2}\cos\theta + \frac{\mu+\mu_1 f+\mu_{11}f^2}{f^2} - 8\lambda^3(\mu+\mu_1 f+\mu_{11}f^2)\frac{f\lambda(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})}{\left(f\lambda(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})\right)^3}\int\cos\theta\,\partial t$$

$$+ 8\lambda^4(\mu+\mu_1 f+\mu_{11}f^2)\int\left(\frac{\left(f\lambda(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})\right)^2 - 3\left(f\lambda(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})\right)^2}{\left(f\lambda(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})\right)^4}\int\cos\theta\,\partial t\right)\partial t,$$

und wenn weiter

W anstatt $f\lambda(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})$, und

W_1 anstatt $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial t}$ oder statt $f\lambda(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})-(\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})$

eingeführt werden,

$$F_1 = \frac{\partial\cos\theta}{\partial t} - (\mu+\mu_1 f+\mu_{11}f^2)\left(\frac{4\lambda^2}{UW}\cos\theta - \frac{W}{Uf^2} + \frac{8\lambda^3 W_1}{UW^2}\int\cos\theta\,\partial t - \frac{8\lambda^4 W}{U}\int\left(\frac{W^2-3W_1^2}{W^4}\int\cos\theta\,\partial t\right)\partial t\right) \ldots (m)$$

So findet sich ferner

$$P_2 = \frac{1}{U^2}\int U^2\left(\frac{1}{2}\mu\left(\frac{F_1}{T}\right)^2 - \mu_{11}\left(P_1^2+\frac{1}{2}F_1^2\right)\right)\partial t,$$

$$F_2 = T\int\left(\mu\frac{P_1 F_1}{T^3} - \mu_{11}\frac{P_1 F_1}{T}\right)\partial t, \qquad \text{u. s. w. f.}$$

Demnach hat man

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{W}{U} + \varepsilon\Big(\frac{\partial S\sin\theta}{\partial t} - \frac{4\lambda^2 k}{U^2} - \frac{2\lambda U_1}{U}\sin\theta + 2\lambda^2\Big(1+\Big(\frac{U_1}{U}\Big)^2\Big)\int\sin\theta\,\partial t - 8\frac{\lambda^3}{U^2}\int\Big(UU_1\int\sin\theta\,\partial t\Big)\partial t\Big)$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{U^2}\int U^2\Big(\tfrac{1}{2}\mu\frac{F_1^2}{F^2} - \mu_{11}\big(P_1^2+\tfrac{1}{2}F_1^2\big)\Big)\partial t \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon\Big(\frac{\partial S\cos\theta}{\partial t} - (\mu+\mu_1 f+\mu_{11}f^2)\Big(\frac{4\lambda^2}{UW}\cos\theta - \frac{W}{Uf^2} + \frac{8\lambda^3 W_1}{UW^2}\int\cos\theta\,\partial t - \frac{8\lambda^4 W}{U}\int\Big(\frac{W^2-3W_1^2}{W^4}\int\cos\theta\,\partial t\Big)\partial t\Big)$$

$$+\varepsilon^2 F\int\Big(\mu\frac{P_1F_1}{F^3} - \mu_{11}\frac{P_1F_1}{F}\Big)\partial t \text{ etc.}$$

Sollen diese unter der Voraussetzung $\mu_1^2 > 4\mu\mu_{11}$ abgeleiteten Formeln auf die Fälle $\mu_1^2 \leqq 4\mu\mu_{11}$ angewandt werden, so erhält man durch das (§36) bemerkte Verfahren

im Falle $\mu_1^2 < 4\mu\mu_{11}$
$$\frac{U}{2\lambda} = \frac{\lambda'\cos\lambda' t + (\frac{1}{2}\mu_1+\mu_{11}f)\sin\lambda' t}{\lambda'}$$
$$\tfrac{1}{2}U_1 = -\lambda'\sin\lambda' t + (\tfrac{1}{2}\mu_1+\mu_{11}f)\cos\lambda' t,$$
$$\frac{W}{2\lambda} = \frac{f\lambda'\cos\lambda' t - (\mu+\frac{1}{2}\mu_1 f)\sin\lambda' t}{\lambda'},$$
$$\tfrac{1}{2}W_1 = -f\lambda'\sin\lambda' t - (\mu+\tfrac{1}{2}\mu_1 f)\cos\lambda' t;$$

im Falle $\mu_1^2 = 4\mu\mu_{11}$
$$\frac{U}{2\lambda} = 1+(\tfrac{1}{2}\mu_1+\mu_{11}f)\,t,$$
$$\tfrac{1}{2}U_1 = \tfrac{1}{2}\mu_1+\mu_{11}f,$$
$$\frac{W}{2\lambda} = f-(\mu+\tfrac{1}{2}\mu_1 f)\,t,$$
$$\tfrac{1}{2}W_1 = -(\mu+\tfrac{1}{2}\mu_1 f).$$

Und wollte man gleich von Anfange die Gleichung (k) in die den Fällen $\mu_1^2 \leqq 4\mu\mu_{11}$ entsprechenden übersetzen, so hätte man, wie erlaubt ist, $-4C_1$ im Falle $\mu_1^2 < 4\mu\mu_{11}$ und $4\lambda^2 C_1$ im Falle $\mu_1^2 = 4\mu\mu_{11}$ statt C_1 in dieser Gleichung zu substituiren, und würde hierdurch

für jenen Fall $P_1 = \dfrac{C_1}{(\lambda'\cos\lambda' t + (\frac{1}{2}\mu_1+\mu_{11}f)\sin\lambda' t)^2}$,

für diesen Fall $P_1 = \dfrac{C_1}{(1+(\frac{1}{2}\mu_1+\mu_{11}f)\,t)^2}$

erhalten.

§38.

Um weiter die Integrale von $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t}$ zu entwickeln, findet man zunächst

im Falle $\mu_1^2 > 4\mu\mu_{11}$

$$\int T\partial t = \frac{1}{\mu_{11}} \log \frac{\lambda(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + (\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})}{2\lambda e^{-\lambda t}} - \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu_1 f + \lambda f}{\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f - \lambda}\, t.$$

Setzt man $\lambda'\sqrt{-1}$ anstatt λ, so wird $\mu_{11}\frac{\mu + \frac{1}{2}\mu_1 f + \lambda f}{\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f - \lambda} t = \lambda'\sqrt{-1}.t + \frac{1}{2}\mu_1 t$, und da $\lambda'\sqrt{-1}.t = \log e^{\lambda'\sqrt{-1}.t}$ ist, so hat man

im Falle $\mu_1^2 < 4\mu\mu_{11}$ $\quad \int T\partial t = \frac{1}{\mu_{11}}\left(\log \frac{\lambda' \cos \lambda' t + (\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f)\sin \lambda' t}{\lambda'} - \frac{1}{2}\mu_1 t\right)$, und

im Falle $\mu_1^2 = 4\mu\mu_{11}$ $\quad \int T\partial t = \frac{1}{\mu_{11}}\left(\log(1 + (\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f)t) - \frac{1}{2}\mu_1 t\right)$.

Die Integrale $\int P_1\partial t$ und $\int F_1 \partial t$ lassen sich zwar nicht auf gleich einfache Weise, wie im §33 geschehen ist, zugleich mit P_1 und F_1 unmittelbar aus den Differential-Gleichungen, woraus man diese Functionen findet, ableiten; man erhält aber durch theilweises Integriren $\int P_1 \partial t$ aus (l) im §36, und $\int F_1 \partial t$ aus (m) im §37, und somit für den Fall $\mu_1^2 > 4\mu\mu_{11}$

$$x = \int T\partial t$$
$$+ \varepsilon\left(\sin\theta - \frac{2\lambda h}{\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f + \lambda}\left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{U}\right) - 2\lambda\frac{U_1}{U}\int \sin\theta\partial t + \frac{4\lambda^2}{UU_1}\int\left(UU_1\int\sin\theta\partial t\right)\partial t - 4\lambda^3(U_1^2 - U^2)\int\frac{1}{(UU_1)^2}\int UU_1\left(\int\sin\theta\partial t\right)\partial t^2\right)$$
$$+ \varepsilon^2\int\frac{1}{U^2}\int U^2\left(\tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{F_1}{F}\right)^2 - \mu_1\left(P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2\right)\right)\partial t^2 \ \&c.$$

$$z = \varepsilon\Big(\cos\theta - 1 - (\mu + \mu_1 f + \mu_{11} f^2)\Big[\frac{4\lambda^2}{UW}\int\cos\theta\partial t - \frac{1}{F^2}\int T\partial t + 4\lambda^3\left(\frac{W}{U}\right)^2\frac{3W_1U + WU_1}{W^2 - 3W_1^2}\int\left(\frac{W^2 - 3W_1^2}{W^4}\int\cos\theta\partial t\right)\partial t$$
$$+ 8\lambda^4\int\left(\frac{W}{U}\right)^2\frac{3(U_1^2 - U^2)(W^2 - 3W_1^2) - 2UW(UW + U_1W_1)}{(W^2 - 3W_1^2)^2}\int\left(\frac{W^2 - 3W_1^2}{W^4}\int\cos\theta\partial t\right)\partial t^2\Big]\Big)$$
$$+ \varepsilon^2\int T\int\left(\mu\frac{P_1F_1}{F^3} - \mu_{11}\frac{P_1F_1}{F}\right)\partial t^2 \ \&c.$$

Aus $\frac{2\lambda h}{\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f + \lambda}\left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{U}\right)$ wird $\frac{h \sin \lambda' t}{\lambda'\cos\lambda' t + (\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f)\sin\lambda' t}$ im Falle $\mu_1^2 < 4\mu\mu_{11}$,

und $\frac{ht}{1 + (\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f)t}$ im Falle $\mu_1^2 = 4\mu\mu_{11}$.

Endlich mag noch bemerkt werden, daß die für $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, x, z im vorigen und in diesem § erhaltenen Ausdrücke zugleich auch für die Fälle gelten, wenn von den drei Größen μ, μ_1, μ_{11} eine oder zwei gleich Null sind.

§39.

Was die dem Falle, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ die Richtung von Gz gegen Gx hat, entsprechenden Gleichungen (E) des §26 betrifft,

so lassen sie sich leicht auf die bisher behandelten Gleichungen $(E_,)$ zurückführen.

Führt man nämlich einen neuen Winkel $\theta_,$ ein, so daß $\theta = \pi + \theta_,$ ist, so wird $\sin\theta = -\sin\theta_,$, $\cos\theta = -\cos\theta_,$, $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\theta_,}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\theta_,}{\partial t^2}$, der Anfangswerth von $\theta_,$ gleich Null, und die Gleichungen (E) verwandeln sich in folgende:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \sin\theta_,}{\partial t^2} = -\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \varepsilon\,\frac{\partial^2 \cos\theta_,}{\partial t^2} = -\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},\\ &\frac{\partial^2\theta_,}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{\rho}\,\varepsilon\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\left(\cos\theta_,\frac{\partial x}{\partial t} + \sin\theta_,\frac{\partial z}{\partial t}\right),\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots(E_{,,})$$

welche den Winkel $\theta_,$ eben so enthalten, wie die Gleichungen $(E_,)$ den Winkel θ, und übrigens von diesen Gleichungen nur im Zeichen von z verschieden sind.

Es folgt hieraus und aus den Anfangswerthen von $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, x, z (526), daß für $\frac{\partial x}{\partial t}$ und x ganz dieselben Ausdrücke aus den Gleichungen $(E_{,,})$ wie aus den Gleichungen $(E_,)$, für $\frac{\partial\theta_,}{\partial t}$ und $\theta_,$ dieselben Ausdrücke aus den Gleichungen $(E_{,,})$ wie für $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ und θ aus den Gleichungen $(E_,)$, und für $\frac{\partial z}{\partial t}$ und z aus den Gleichungen $(E_{,,})$ ebenfalls die aus den Gleichungen $(E_,)$ sich ergebenden Ausdrücke, aber mit entgegengesetzten Zeichen, hervorgehen müssen, oder daß, wenn man die positive Richtung der Achse Oz von oben nach unten, statt von unten nach oben, gehend annimmt, wodurch z sein Zeichen ändert, und wenn der Umdrehungswinkel wieder von dem Theil dieser Achse auf deren positiver Seite an gerechnet wird, so daß er gleich Null wird für $t = 0$, die Gleichungen (E) und $(E_,)$ einander vollkommen gleich werden, und daß die, auf die positiven Theile der festen Achsen Ox und Oz bezogene, doppelte Bewegung des Geschosses in beiden Fällen ganz dieselbe ist.

Daß dem so seyn muß, läßt sich von vorn herein übersehen, wenn man überlegt, daß, wenn von der Wirkung der Schwerkraft abgesehen oder die Größe g außer Acht gelassen wird, die beiden Fälle, auf welche die Gleichungen (E) und $(E_,)$ sich beziehen, nach den Voraussetzungen,

worauf die Construction derselben sich gründet, sich durch nichts unterscheiden als durch die Lage des positiven Theils der Achse Oz im Raume, welche Lage gänzlich Sache der Willkühr ist und auf die Endergebnisse der Rechnung keinen Einfluß üben kann.

Eben so kann dieser positive Theil der Achse Oz in der auf der Achse Ox im Anfangspunkt O senkrechten Ebene jede andere beliebige Lage haben, z. B. mit der Horizontalen in dieser Ebene auf der rechten oder linken Seite (§5) der durch die Achse Ox gehenden Vertikal-Ebene zusammenfallen, und das Geschoß wird immer dieselbe Bahn in Bezug auf diese Achsen beschreiben, wenn nur die Bedingung (§24), welche den Differential-Gleichungen der Bahn zum Grunde liegt, daß die Umdrehungsachse im Anfange der Bewegung sowohl auf der Ebene xOz, als auf der Hauptachse Gz, dem die Excentricität GF enthaltenden Durchmesser des Geschoßes, (welcher der Kürze wegen die <u>Centrallinie</u> desselben heißen mag) senkrecht stehe, erfüllt ist, oder, was auf eins hinauskömmt, wenn nur die Umdrehung im Anfange der Bewegung um eine Achse Statt hat, welche sowohl auf der Achse Ox, der Richtungslinie der Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts, als auch auf der Centrallinie des Geschoßes, um welche die Masse des letzteren symmetrisch vertheilt ist, senkrecht steht, indem in solchem Falle der auf der anfänglichen Rotations-Achse senkrechte Durchschnitt des (als nicht schwer angenommenen) Geschoßes, welcher die Centrallinie desselben enthält, immer in derselben Ebene, in der auch die feste Achse Ox sich befindet, bleiben und die Umdrehung beständig um denselben Durchmesser des Geschoßes Statt finden wird (§24), und die auf der Achse Ox senkrechte feste Achse Oz ebenfalls in diese Ebene gelegt werden kann.

§40.

Allgemein finden demnach unter den Voraussetzungen 1, 2) (§23) und 4) (§26) die Gleichungen (E.) auf alle Fälle Anwendung, in welchen die anfängliche Rotations-Achse, welche Lage sie übrigens im Raume

haben mag, sowohl auf der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts, als auf dem durch den Schwerpunkt gehenden Durchmesser senkrecht steht, und durch deren Auflösung werden die beiderlei Bewegungen des Geschosses, die fortschreitende und die umdrehende, in Bezug auf zwei rechtwinkliche feste Achsen bestimmt, welche den Anfangspunkt O des Mittelpunkts zu ihrem Anfangspunkt haben, und deren eine mit jener anfänglichen Richtung des Mittelpunkts zusammenfällt, die andere aber in der Ebene liegt, in der die Centrallinie und der ganze auf der anfänglichen Rotations-Achse senkrechte durch den Mittelpunkt gehende Durchschnitt des Geschosses ihre Umdrehung und gesammte Bewegung vollführen. Diese Ebene, welche man die *Rotations-Ebene der Centrallinie*, oder auch nur die *Rotations-Ebene*, nennen kann, zerfällt durch die parallel mit der ersten Achse durch den Mittelpunkt gehende Gerade in zwei Theile, in deren einem der Schwerpunkt oder überhaupt irgend ein Punkt des oben genannten Durchschnitts sich befindet, während er bei der Umdrehung von der hintern nach der vordern Seite sich bewegt, und in deren anderem er sich befindet, während er von der vordern nach der hintern Seite zurückgeht. Zur Unterscheidung wird jener der *vorwärtige*, dieser der *rückwärtige* Theil der Rotations-Ebene genannt werden; und in den Gleichungen (E,) ist hiernach der positive Theil der ersten Achse als auf der vordern Seite der auf ihr im Punkt O senkrechten Ebene, nach welcher Seite die Geschwindigkeit des Mittelpunkts gerichtet ist, der positive Theil der zweiten Achse oder ihrer durch den Mittelpunkt gehenden Parallelen als im vorwärtigen Theile der Rotations-Ebene liegend angenommen.

In Wirklichkeit wird zwar, wenn die anfängliche Rotations-Achse sowohl auf der Centrallinie als auf der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts senkrecht ist, nur bei horizontaler Lage der Rotations-Achse der auf diese Achse senkrecht durch den

Mittelpunkt geführte Durchschnitt des Geschoßes während der ganzen Dauer der Bewegung in einer und derselben Ebene, und die Rotations-Achse senkrecht auf dieser Ebene, bleiben. Insofern aber die Wirkung der Schwerkraft in den Gleichungen (E.) außer Acht gelassen ist, wird unter den genannten Voraussetzungen diese Beständigkeit auch bei anderer Lage der anfänglichen Rotations-Achse gegen den Horizont Statt finden.

Wird ein sphärisches Geschoß, dessen Einrichtung den Voraussetzungen des §23 entspricht und welches so geladen ist, daß der Mittelpunkt, aber nicht der Schwerpunkt, in der Seelenachse des Geschützrohres liegt, abgeschossen, so wirkt die Kraft der entzündeten Ladung nach der Richtung der Seelenachse auf das Geschoß, der Schwerpunkt erlangt eine mit dieser Achse gleichlaufende Anfangsgeschwindigkeit, und zugleich nimt, abgesehen von der geringen Reibung, welche die Schwere des Geschoßes auf der untern Fläche der Seele hervorbringt, dasselbe eine umdrehende Bewegung um eine Achse an, welche senkrecht auf der durch die Seelenachse und den Schwerpunkt gehenden Ebene ist.(*) Unter diesen Umständen sind demnach im Allgemeinen die Bedingungen erfüllt, unter welchen der senkrecht auf die anfängliche Rotations-Achse durch den Mittelpunkt gehende Durchschnitt des Geschoßes, welche Lage, wenn zugleich die Schwerkraft außer Acht bleibt, der Schwerpunkt übrigens haben mag, in einer und derselben Ebene, der Rotations-Ebene, sich fortbewegt.

Man kann bemerken, daß der Begriff der Rotations-Ebene und ihrer beiden Theile ebenfalls Anwendung auf ein kugelförmiges Geschoß findet, dessen Masse um den Mittelpunkt, der sonach mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, symmetrisch vertheilt ist (§20), und welches um eine auf der Richtung der fortschreitenden Bewegung senkrechte Achse sich dreht.

§41.

In den für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, x, z im Vorigen abgeleiteten Ausdrücken stellen die mit ε behafteten Glieder die Veränderungen vor, welche die

(*) P. Méc. II. no 437.

fortschreitende Bewegung des Geschosses in Folge der Rotation erleidet, und zwar beziehen sich diejenigen dieser Glieder, welche sin δ und cos δ enthalten, auf die Veränderungen, welche von der Lage der Centrallinie gegen die festen Achsen Ox und Oz abhängig, bei jeder Umdrehung des Geschosses abwechselnd wachsen und abnehmen, während die übrigen Glieder, welche ihr Zeichen nach dem Werthe des Winkels δ nicht ändern und nur von der Zeit t abhängen, die fortdauernd in derselben Richtung erfolgenden Veränderungen ausdrücken.

Zur Beurtheilung des Grades der Erheblichkeit, welchen diese durch die Umdrehung entstehenden Veränderungen der fortschreitenden Bewegung erreichen können, ist es nothwendig, numerische Werthe für die in den Gleichungen (E.) und deren Integralen vorkommenden constanten Größen $\varepsilon, \mu, \varsigma, J, h$ anzugeben.

Bei den im Folgenden näher zu erwähnenden, in der württembergischen Artillerie angestellten, Versuchen mit excentrischen Granaten, deren äussere Oberfläche und innere Aushöhlung kugelförmige Gestalt und die Halbmesser $l = 0,284$ und $l_1 = 0,199$ württ. Fuß (1) hatten, war in dem senkrecht auf die Achse des Mundloches durch den Mittelpunkt F der Oberfläche geführten Durchschnitt des Geschosses, welchen die Fig. 3 darstellt, der Mittelpunkt C der Aushöhlung um den Abstand $r = \frac{l-l_1}{2} = 0,0425$ Fuß von F entfernt, so daß die größte Eisenstärke auf der einen Seite dreimal so groß war als die kleinste auf der andern Seite. Wird von dem wegen des Mundloches fehlenden Theile der Masse der Hohlkugel, welche weder Füllloch noch Öhr hatte, abgesehen, so lag der Schwerpunkt G in der durch beide Mittelpunkte gehenden geraden Linie CF, und welche, der Voraussetzung 2) des §23 gemäß, die als gleichartig angenommene Masse des Geschosses symmetrisch vertheilt war, und es verhielt sich

$$\left.\begin{matrix}GF\\ \varepsilon\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}FC\\ r\end{matrix}\right. = l_1^3 : l^3 - l_1^3,$$

woraus $\varepsilon = \frac{l_1^3}{l^3 - l_1^3} \cdot r = 0,02229.. = \frac{1}{44,86..}$ folgt.

(1) Der württemb. Fuß = 127 Par. Linien = 0,28649 Meter.

Das mittlere Gewicht der Granaten beträgt 22 Pfund 14 Loth = $\frac{718}{32}$ Pf. württemb. Gewicht (2).

Wird für mittlere Temperatur das Gewicht des württemb. Cubicfußes Wasser zu 50,2 württ. Pfund und die atmosphärische Luft 800 Mal leichter als Wasser angenommen, so hat man demnach, wenn es sich von der Bewegung des Geschosses in der Luft handelt,

$$\frac{D}{D_1} = \frac{4}{3}\pi l^3 \cdot \frac{50,2}{800}\cdot\frac{32}{718} \quad \text{und} \quad \mu\ (\S 23) = \frac{2n\pi(0,234)^2\cdot 50,2\cdot 32}{(i+2)800\cdot 718},$$

oder, wenn $i = 2$ und, für diesen Werth von i, $n = 3/5$, $\mu = \mu_2$ gesetzt wird (§28),

$$\mu_2 = \frac{1}{4703,8..}.$$

Wäre das Hohlgeschoß eine Vollkugel von der Dichtigkeit D_1, so wäre in Bezug auf die, auf der Centrallinie CG senkrechte, Achse GE das Drehungs-Moment derselben

$$= \frac{8}{15}\pi l^5 \cdot \frac{D_1}{g} + \frac{4}{3}\pi l^3 \cdot \frac{D_1}{g}\cdot \varepsilon^2, \quad (3)$$

und das Drehungs-Moment des den Raum der Aushöhlung einnehmenden Theiles der Kugel

$$= \frac{8}{15}\pi l_1^5 \cdot \frac{D_1}{g} + \frac{4}{3}\pi l_1^3 \cdot \frac{D_1}{g}\cdot (r+\varepsilon)^2;$$

daher ist in Bezug auf dieselbe Achse das Drehungs-Moment der Hohlkugel oder

$$\frac{A}{g}\ (\S 23) = \frac{8}{15}\pi (l^5 - l_1^5)\frac{D_1}{g} - \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{l^3 l_1^3}{l^3 - l_1^3}\cdot\frac{D_1}{g},$$

und, da das Gewicht M der Hohlkugel $= \frac{4}{3}\pi D_1 (l^3 - l_1^3)$ ist,

$$\frac{A}{M} \text{ oder } \varrho = \frac{2}{5}\,\frac{l^5 - l_1^5}{l^3 - l_1^3} - \frac{l^3 l_1^3}{(l^3 - l_1^3)^2}\cdot r^2 = \frac{1}{25,56..},$$

ferner $\frac{\mu_2}{\varrho} = \frac{1}{185,48..}$ und $\varepsilon\frac{\mu_2}{\varrho} = \frac{1}{8321,06..}$.

Wird die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses aus den Entfernungen bestimmt, welche es, aus der 10pfünd. Haubitze mit $\frac{5}{4}$ pfünd. Ladung abgeschossen, erreichte, wenn die Centrallinie desselben im Geschützrohr paral-

(2) Das württemb. Pfund = 0,467728 Kilogramm.

(3) P. Méc. II. no 371 & 374.

les mit der Seelenachse lag, so ergibt sich deren mittlerer Werth, die Sekunde als Zeiteinheit angenommen, in runder Zahl nahe gleich 800 Fuß. Man hat somit f^0, die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts, $= 800$, die Quantität der Bewegung des Geschosses im Anfange der Bewegung $= \frac{M}{g} . 800$, und das Moment dieser Quantität in Bezug auf die Umdrehungsachse GE oder $G\varepsilon$, oder das Moment des die anfängliche Umdrehung bewirkenden Stoßes, wenn der Mittelpunkt des Geschosses in der Seelenachse und die Centrallinie darauf senkrecht ist (§40), $= \varepsilon . \frac{M}{g} 800$; woraus der Anfangswerth der Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung (4)

$$h = \varepsilon \frac{M}{A} . 800 = \frac{\varepsilon}{\rho} . 800 = 452,2 \ldots,$$

die Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts

$$f \text{ oder } f^0 + \varepsilon h \text{ (§26)} = 810, \text{ und } \mu_2 f = 0,1722 \ldots$$

sich ergibt.

Die hier für μ, ρ, f berechneten Zahlen können als ungefähr mittlere Werthe dieser Größen gelten, während die für ε und h gefundenen zu den größeren Werthen, welche die letzteren Größen bekommen können zu zählen seyn dürften. Die Umdrehungsgeschwindigkeit h gibt $\frac{h}{2\pi}$, für $h = 452,2$ nahe 72, ganze Umläufe in der Sekunde.

§42.

Wäre die Umdrehungsgeschwindigkeit $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ eine beständige Größe, so hätte man $\theta = kt$,

$$\frac{\partial \sin\theta}{\partial t} = h\cos ht,\ \sin\theta = \sin ht,\ \int \sin\theta\, \partial t = \frac{1-\cos ht}{h},\ \iint \sin\theta\, \partial t^2 = \frac{ht - \sin ht}{h^2}, \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial t} = -h\sin ht,\ \cos\theta = \cos ht,\ \int \cos\theta\, \partial t = \frac{\sin ht}{h},\ \iint \cos\theta\, \partial t^2 = \frac{1-\cos ht}{h^2}, \text{ u. s. w.}$$

In Wirklichkeit muß aber $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ durch den Widerstand des flüssigen Mittels, wenn ε nicht gleich Null ist, nach und nach kleiner werden, und es ist

$$\frac{\partial \sin\theta}{\partial t} = \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial t},\ \int \sin\theta\, \partial t = \frac{1}{h} - \frac{\cos\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial t}} - \int \frac{\cos\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2} \partial t,\ \iint \sin\theta\, \partial t^2 = \frac{t}{h} - \frac{\sin\theta}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2} - 2\int \frac{\sin\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^3} \partial t - \iint \frac{\cos\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2} \partial t^2, \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial t} = -\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial t},\ \int \cos\theta\, \partial t = \frac{\sin\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial t}} + \int \frac{\sin\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2} \partial t,\ \iint \cos\theta\, \partial t^2 = \frac{1}{h^2} - \frac{\cos\theta}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2} - 2\int \frac{\cos\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^3} \partial t + \iint \frac{\sin\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2} \partial t^2; \text{ etc.}$$

wo alle angedeuteten Integrale als mit t zugleich verschwindend genommen sind.

(14) P. Méc. II. № 437. Recto. p. 88.

Weil jedoch $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ in der dritten Gleichung (E_1) (§26) während jeder ganzen Umdrehung des Geschosses abwechselnd positiv und negativ wird (§24), und sein absoluter Werth wegen des Factors $\varepsilon\frac{u}{\varrho}$ (§11) keine sehr bedeutende Größe erreicht, so kann, wenn k einen etwas großen Werth hat, während der ersten Secunden der Bewegung die Totalabweichung, welche $\frac{d\theta}{dt}$ erleidet, verhältnißmäßig nicht beträchtlich, oder $\frac{d\theta}{dt}$ von k nicht sehr verschieden seyn. Es handelt sich hier aber nur von größeren Werthen von k, indem nur solche, wie von vorn herein zu übersehen ist, einen merklichen Einfluß auf die fortschreitende Bewegung des Geschosses, wenn überhaupt ein solcher Einfluß möglich ist, haben können, und das Geschoß, wenn k einen gewissen Werth nicht übersteigt, keinen ganzen Umlauf vollenden kann, sondern nach Art eines Pendels die Richtung, in der es sich dreht, wechseln muß (§57).

Wird nun ferner überlegt, daß die Größe $\mu\delta^{i-1}$, wie aus den Gleichungen (E_1) (§26) und aus §28 sich ergibt, von gleicher Ordnung mit der im vorigen § betrachteten Größe $\mu_2\delta$, und daß diese für die in der Anwendung vorkommenden Werthe von μ_2 und δ kleiner als 1 ist, so wird ersichtlich, daß die Bedeutung der für die Coefficienten P_1 und F_1 (§31) abgeleiteten Ausdrücke, wenn k nicht sehr groß ist, wesentlich nur von deren ersten Gliedern abhängt, indem die Glieder der Reihe P_1 vom vierten an von der Ordnung k^{-1}, und jene der Reihe F_1 vom fünften an von der Ordnung k^{-2} sind, und daß man somit beide Reihen als Größen der Ordnung k anzunehmen hat. (*)

Es findet aber der Unterschied zwischen P_1 und F_1 Statt, daß P_1 ein vom Winkel θ unabhängiges Glied der Ordnung k, nämlich $\frac{k}{\tau^{\frac{i}{i-1}}}$, enthält, während das in F_1 enthaltene Glied dieser Ordnung, $-\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$, den

(*) Man bemerke, daß, obgleich die Integrale $\int\sin kt\,dt$, $\int\cos kt\,dt$ ic. die Größe k im Nenner haben, die Ausdrücke für P_1 und F_1, wenn man $\theta = kt$ nimmt, nicht, wie es scheinen könnte, bei abnehmendem k größer werden, sondern im Gegentheil mit k zugleich verschwinden müssen, weil unter der Voraussetzung $\theta = kt$ die Glieder $\varepsilon\frac{d^2\sin\theta}{dt^2}$ und $\varepsilon\frac{d^2\cos\theta}{dt^2}$ der Gleichungen (E_1) für $k = 0$ ebenfalls verschwinden. (Vergl. Anmerkung zu §31.)

Factor $\sin\delta$ hat. Daher kommt es, daß das Integral $\int P_1 dt$ (§33) ebenfalls als eine Größe der Ordnung k, das Integral $\int F_1 dt$ dagegen nur als eine Größe der Ordnung k^0 sich darstellt.

Geht man zu den Coefficienten P_2 und F_2 (§32) etc. über, so folgt aus denselben Betrachtungen, daß $\frac{P_2}{\mu_2}$ als eine Größe der Ordnung k^2, $\frac{F_2}{\mu_2}$ aber, indem F_2 durch theilweises Integriren sich auch in der Form

$$-(i-1)\mu f^{i-2}\tau^{\frac{2-i}{i-1}} P_1 \int F_1 dt + \frac{(i-1)(3-2i)\mu^2 f^{2i-3}}{\tau^{\frac{1}{i-1}}}\int\left(\tau^{\frac{4-2i}{i-1}} P_1 \int F_1 dt\right)dt$$

ausdrücken läßt, als eine Größe der Ordnung k zu betrachten ist. So erhellet ferner, daß P_3 aus zwei Theilen, von welchen der eine als eine mit μ_2^2, der andere als eine mit $\frac{\mu_2}{f}$ multiplicirte Größe der Ordnung k^3 erscheint, und F_3 aus zwei Theilen, wovon der eine als eine mit μ_2^2, der andere als eine mit $\frac{\mu_2}{f}$ multiplicirte Größe der Ordnung k^2 gelten kann, besteht; und so weiter fort in Betreff der übrigen Coefficienten.

Eben so findet sich, daß im Wesentlichen, und wenn t nicht groß ist, das Integral $\int P_2 dt$ als eine durch f dividirte Größe der Ordnung k^2, das Integral $\int F_2 dt$ als eine durch f dividirte Größe der Ordnung k betrachtet werden kann, u. s. f.

Man sieht, daß die Glieder der Reihen (G), (H), (G_1), (H_1) (§32, 33) im Allgemeinen in einer Progression abnehmen, deren Exponent gleich $\varepsilon\mu_2 k$ oder gleich $\frac{\varepsilon k}{f}$ angenommen werden kann, und daß diese Abnahme vom ersten zum zweiten Gliede der Reihe (H) selbst im Verhältnisse von 1 zu $\varepsilon\mu_2$ statt findet. Da nun die numerischen Werthe von $\varepsilon\mu_2 k$ und $\varepsilon\frac{k}{f}$ nach den Annahmen des vorigen §, wobei jene von ε und k noch als größere Werthe gelten können, gleich $\frac{1}{466,63}$ und $\frac{1}{80,35}$ gefunden werden, so ergibt sich, daß, wenn nicht die Größen t, ε, k, $\frac{k}{f}$, μ_2 Werthe haben, welche die in der Anwendung vorkommenden bei weitem übersteigen, die ε^2 und höhere Potenzen von ε als Factoren enthaltenden Glieder der angeführten Reihen gegen die vorhergehenden Glieder derselben von verhältnißmäßig geringer Bedeutung sind, und daß somit die Änderung, welche die fortschreitende Bewegung des Geschosses in Folge der Rotation erleidet, wie der Umdrehungswinkel δ als Function der Zeit

übrigens beschaffen seyn mag, in der Hauptsache nur durch die die Excentricität ε in der ersten Potenz als Factor enthaltenden Glieder ausgedrückt wird.

So kann man, indem man z. B. $i = 2$ nimt, setzen (§ 33)

$$x = \frac{1}{\mu_2}\log(1+\mu_2 f t) + \varepsilon\left(\sin\theta - \frac{kt}{1+\mu_2 f t} - \frac{2\mu_2 f}{1+\mu_2 f t}\int\sin\theta\, dt\right),$$

$$z = \varepsilon\left(\cos\theta - 1 + \log(1+\mu_2 f t) - \frac{\mu_2 f}{1+\mu_2 f t}\int\cos\theta\, dt - \left(\frac{\mu_2 f}{1+\mu_2 f t}\right)^2\iint\cos\theta\, dt^2 \ldots\right).$$

In diesem Ausdruck für z ist $\varepsilon\log(1+\mu_2 f t)$ das bedeutendste, unabhängig vom Winkel θ fortdauernd in einer Richtung wachsende Glied, welches demnach zeigt, daß der Mittelpunkt des Geschosses durch die Rotation von der Richtungslinie seiner Anfangsgeschwindigkeit sich nach derjenigen Seite derselben, auf welcher die übrigen Punkte der Centrallinie während ihrer Bewegung von der hintern nach der vordern Seite sich befinden, d. i. nach der Seite des vorwärtigen Theils der Rotations-Ebene (§ 40), entfernt. Allein vermöge der Gleichung

$$z = \varepsilon\log(1+\mu_2 f t) \text{ oder } t = \frac{e^{\frac{z}{\varepsilon}}-1}{\mu_2 f},$$

in welcher e die Grundzahl 2,7182818 der natürlichen Logarithmen bedeutet, muß, wenn man den Größen ε und $\mu_2 f$ die Werthe wie im § 41 beilegt,

$t =$ 9,978 Secunden für $z = \varepsilon$,
$=$ 37,103 " " $z = 2\varepsilon$,
$=$ 509,82 " " $z =$ 0,1 Fuß
$=$ 127906,7 " " $z = 10\varepsilon =$ 0,2229 Fuß

seyn, woraus erhellet, daß die während der Dauer der Bewegung des Geschosses durch die Umdrehung entstehende seitliche Abweichung desselben zwar nicht Null, aber so gering ist, daß sie gänzlich außer der Möglichkeit der Beobachtung liegt, und daß die einem bestimmten Zeittheil entsprechende Zunahme dieser Abweichung fortwährend und sehr schnell abnimt.

Der Ausdruck für x enthält zwar ein Glied, nämlich $\varepsilon\frac{kt}{1+\mu_2 f t}$, welches, da εk nach § 41 gleich 10,08.. ist, einige Bedeutung hat, und nahe im Verhältniß der Zeit zunimt; dasselbe ist aber nur dadurch in die Formel eingegangen, daß man statt der Geschwindigkeit f' des Schwerpunkts die Geschwindigkeit $f = f' + \varepsilon k$ des Mittelpunkts in die Rechnung aufgenommen hat. Setzt man nämlich in dem ersten Gliede

$$\frac{(1+(i-1)f^{i-1}\mu t)^{\frac{i-2}{i-1}}-1}{(i-2)f^{i-2}\cdot\mu}$$

der Reihe (G_1) $f^0+\varepsilon h$ für f, so wird dasselbe, indem man es nach Taylors Theorem entwickelt und das erste Glied der Entwickelung mit F^0 bezeichnet,

$$= F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial f^0}\varepsilon h + \ldots \text{ d. i. } = \frac{(1+(i-1)f^{0\,i-1}\mu t)^{\frac{i-2}{i-1}}-1}{(i-2)f^{0\,i-2}\mu} + \frac{\varepsilon h}{\mu f^{0\,i-1}}\left(1-\frac{1}{(1+(i-1)f^{0\,i-1}\mu t)^{\frac{1}{i-1}}}\right)+\ldots,$$

wodurch das einzige Glied von der Ordnung h im Coefficienten $\int P_1 dt$ der Reihe (G_1) herausfällt, und die Coefficienten dieser Reihe, indem man durchaus ebenso substituirt und entwickelt, gleich unbedeutend oder selbst noch geringer werden als die entsprechenden Coefficienten der Reihe (H_1). Auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Reihen (G) und (H). Daher ist die Veränderung, welche die Umdrehung des Geschosses nach der Richtung seiner Anfangsgeschwindigkeit in dessen fortschreitender Bewegung hervorbringt, ebenfalls als verschwindend klein zu betrachten.

§ 43.

Auch wenn für den Exponenten i ein anderer Werth als 2 anzunehmen wäre, so gewährt, da die Größe μf^{i-1} (§ 28) für die hier in Rücksicht zu nehmenden Werthe von t mit der Größe $\mu_2 f$ von gleicher Ordnung ist, und der Unterschied zwischen i und 2 der Erfahrung gemäß höchstens kaum bis zur Einheit steigen kann, die Form der Ausdrücke (G), (H), (G_1), (H_1) leicht die Überzeugung, daß dadurch die Ergebnisse, welche nach dem vorhergehenden § die Voraussetzung $i=2$ gibt, keine wesentliche Änderung erleiden können. Eben dieses leuchtet ferner für die Voraussetzung $i=1$ aus den für diesen Fall, auf welchen die oben genannten Ausdrücke keine Anwendung finden, und in welchem μ ungefähr gleichen Werth mit $\mu_2 f$ hat, im § 34 dargestellten Formeln von selbst ein.

Werden die Ausdrücke für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, x, z der § 37 und 38 zu gleichem Zwecke wie jene der § 32 und 33 einer nähern Prüfung unterworfen, so führen auch sie zu einem ähnlichen Resultat. In den Gleichungen (F) (§ 35) steht der Factor $\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}+\mu_1+\mu_2\frac{ds}{dt}$ an der Stelle des eine allgemeinere Bedeutung vertretenden Factors $\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^{i-1}$ der Gleichungen (E_1) (§ 26);

daher ist die Größe $\mu f^{-1} + \mu_1 + \mu_{11} f$, und jedes ihrer Glieder für sich, obgleich sich diese, da man über den Werth des zu jedem derselben gehörigen numerischen Coefficienten u nichts näheres weiß, auf unzählig viele Arten als unter sich verbunden denken lassen, als mit der Größe $\mu_2 f$ auf gleicher Ordnung stehend zu betrachten. Versteht man nun unter λ_2 irgend eine, nicht specieller bestimmt gedachte, Größe von gleicher Ordnung mit $\mu_2 f$, so kann man für den hier vorliegenden Zweck $2\sqrt{\frac{1}{4}\mu_1^2 - \mu\mu_{11}}$ oder 2λ gleich λ_2, $\frac{1}{2}\mu_1 + \mu_{11} f$ ebenfalls gleich λ_2, $\mu + \frac{1}{2}\mu_1 f = \lambda_2 f$ setzen, und erhält hiernach durch Entwickelung

$$e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} = 2 + \tfrac{1}{4}(\lambda_2 t)^2 + \ldots, \qquad e^{\lambda t} - e^{-\lambda t} = \lambda_2 t + \ldots\ldots,$$
$$U = \lambda_2\left(1 + \lambda_2 t + \tfrac{1}{8}(\lambda_2 t)^2 \ldots\right), \qquad U_1 = 2\lambda_2\left(1 + \tfrac{1}{4}\lambda_2 t + \tfrac{1}{8}(\lambda_2 t)^2 \ldots\right),$$
$$W = \lambda_2 f\left(1 - \lambda_2 t + \tfrac{1}{8}(\lambda_2 t)^2 \ldots\right), \qquad W_1 = -2\lambda_2 f\left(1 - \tfrac{1}{4}\lambda_2 t + \tfrac{1}{8}(\lambda_2 t)^2 \ldots\right).$$

Indem man von diesen Umformungen Gebrauch macht und übrigens demselben Gange der Schlüsse wie im §42 folgt, findet sich wieder, daß die Coefficienten P_1 und F_1 (§36 und 37) als Größen von der Ordnung h, P_2 als eine mit μ_2 multiplicirte Größe der Ordnung h^2, F_2 als eine mit μ_2 multiplicirte Größe der Ordnung h, u. s. w. zu betrachten sind; daß, wenn t nicht groß ist, $\int P_1 dt$ ebenfalls als eine Größe der Ordnung h, $\int F_1 dt$ als eine Größe der Ordnung h^0, u. s. f. angenommen werden kann, und die die Excentricität ε in der zweiten oder in höhern Potenzen als Factor enthaltenden Glieder der Reihen, welche $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ec. ausdrücken, im Verhältniß gegen die Glieder, welche ε in der ersten Potenz zum Factor haben, außer Acht bleiben können, daß aber auch durch die letzteren Glieder keine irgend erhebliche, durch die Rotation entstehende, Veränderung in der fortschreitenden Bewegung des Geschosses angezeigt wird.

Der Coefficient P_1 scheint zwar durch das, den Winkel θ nicht enthaltende, Glied $\frac{4\lambda^2 k}{U^2}$ der Ordnung h einige Bedeutung erreichen zu können; durch Einführung der, von der Rotation unabhängigen, Anfangsgeschwindigkeit f^0 des Schwerpunkts statt jener des Mittelpunkts fällt aber, da $\frac{\partial f^0}{\partial f} = \frac{4\lambda^2}{U^2}$ ist, dieses Glied aus P_1, und eben so das entsprechende Glied aus $\int P_1 dt$, wieder heraus, so daß diese Coefficienten nicht weniger gering als F_1 und $\int F_1 dt$ sich ergeben.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen geht aber, noch ehe der Winkel θ, wie er als Function von t aus der dritten Gleichung (E.) oder (F) folgt, bekannt ist, mit genügender Sicherheit hervor, daß unter den Voraussetzungen, worauf diese Gleichungen (E.) und (F) gegründet sind, wie groß immer die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts und die anfängliche Umdrehungsgeschwindigkeit seyn mögen, die Abweichungen, welche in der Flugbahn der kugelförmigen Geschoße durch die Umdrehung derselben verursacht werden, weder nach der Richtung ihrer Anfangsgeschwindigkeit, noch nach einer darauf senkrechten Richtung, zu irgend einer durch Beobachtung wahrnehmbaren Größe anwachsen können. (Man vergleiche §67–70).

Es mag hier noch bemerkt werden, daß die für x und z (§33 u. 38) erhaltenen Ausdrücke unmittelbar auch die Coordinaten der Bahn des Schwerpunkts

$$x^{0} = x - \varepsilon \sin\theta, \qquad z^{0} = z - \varepsilon \cos\theta \quad (§25)$$

liefern, und daß sie daher, wenn man in ihnen ξ durch $\xi^{0} + \varepsilon h$ ersetzt, zugleich die Integrale der Differential-Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunkts enthalten, und diesen Gleichungen Genüge leisten müssen (§53).

§44.

Die weitere Behandlung der dritten Gleichung (E.) zur Entwickelung der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ und des Umdrehungswinkels θ als Zeitfunctionen wird der Einfachheit wegen auf die Voraussetzung eines einzigen Werthes von i, und zwar des Werthes 2, beschränkt werden.

Da die Größen $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ aus den beiden ersten Gleichungen (E.) als Functionen des Winkels θ und der Zeit t bereits dargestellt sind, und die Größe $\frac{d\xi}{dt}$ aus den für P, F, etc. gefundenen Ausdrücken nach §30 als solche Function sich ebenfalls darstellen läßt, so kann zwar die dritte Gleichung (E.) als eine nur die zwei veränderlichen Größen θ und t enthaltende Gleichung ausgedrückt werden; weil jedoch der Winkel θ, ebenso wie $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$, nur als eine nach den Potenzen von ε fort

laufende Reihe behandelt werden kann, so erscheint es, um zugleich $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t}$ ganz nach ε geordnet zu erhalten, angemessener, die gleichzeitige Integration der drei Gleichungen (E_1) zu versuchen.

Der Hauptschwierigkeit, welche sich dieser Integration entgegenstellt, und welche in der langsamen Convergenz der bekannten, $\sin\theta$ und $\cos\theta$ als Functionen von t ausdrückenden, Formeln liegt (§27), läßt sich, wenigstens für verhältnißmäßig kleine Werthe von t, durch folgendes Verfahren begegnen.

Unter der Voraussetzung $i = 2$ werden die Gleichungen (E_1)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \sin\theta}{\partial t^2} = -\mu\,\frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial t^2} = -\mu\,\frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},\\
&\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{\varrho}\,\varepsilon\,\frac{\partial s}{\partial t}\left(\cos\theta\,\frac{\partial x}{\partial t} - \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial t}\right).
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(K)$$

Man setze wie im §29

$$\frac{\partial x}{\partial t} = T + P_1\cdot\varepsilon + P_2\cdot\varepsilon^2 + P_3\cdot\varepsilon^3 + \cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F_1\,\varepsilon + F_2\cdot\varepsilon^2 + F_3\cdot\varepsilon^3 + \cdots,$$

und zugleich

$$\theta = ht + \theta',\quad \theta' = Q_1\cdot\varepsilon + Q_2\cdot\varepsilon^2 + Q_3\cdot\varepsilon^3 + \cdots,$$

so daß $\frac{\partial\theta}{\partial t} = h + \frac{\partial\theta'}{\partial t},\ \frac{\partial\theta'}{\partial t} = \frac{\partial Q_1}{\partial t}\cdot\varepsilon + \frac{\partial Q_2}{\partial t}\cdot\varepsilon^2 + \frac{\partial Q_3}{\partial t}\cdot\varepsilon^3 + \cdots$ ist,

und daß θ' und $\frac{\partial\theta'}{\partial t}$, indem h den Anfangswerth von $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ bedeutet (§26), Functionen von der Beschaffenheit vorstellen, welche nicht nur für $\varepsilon = 0$, sondern mit den Hülfsfunctionen $Q_1, Q_2 \ldots \frac{\partial Q_1}{\partial t}, \frac{\partial Q_2}{\partial t} \ldots$ ebenfalls für $t = 0$ verschwinden.

Dadurch wird (§29, 30)

$$\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t} = T^2 + 2TP_1\cdot\varepsilon + \left(2TP_2 + P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2\right)\varepsilon^2 + \left(2TP_3 + 2P_1P_2 + F_1F_2\right)\varepsilon^3 + \cdots,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} = TF_1\cdot\varepsilon + \left(TF_2 + P_1F_1\right)\varepsilon^2 + \left(TF_3 + P_1F_2 + P_2F_1 + \tfrac{1}{2}\frac{F_1^3}{T}\right)\varepsilon^3 + \cdots,$$

$$\sin\theta' = Q_1\cdot\varepsilon + Q_2\cdot\varepsilon^2 + \left(Q_3 - \tfrac{1}{6}Q_1^3\right)\varepsilon^3 + \left(Q_4 - \tfrac{1}{2}Q_1^2Q_2\right)\varepsilon^4 \cdots,$$

$$\cos\theta' = 1 - \tfrac{1}{2}Q_1^2\cdot\varepsilon^2 - Q_1Q_2\cdot\varepsilon^3 - \left(Q_1Q_3 + \tfrac{1}{2}Q_2^2 - \tfrac{1}{24}Q_1^4\right)\varepsilon^4 \cdots,$$

$$\sin\theta = \sin ht\cos\theta' + \cos ht\sin\theta' = \sin ht + \cos ht.\, q_1\,\varepsilon + (\cos ht.\, q_2 - \tfrac{1}{2}\sin ht.\, q_1^2)\,\varepsilon^2 + (\cos ht(q_3 - \tfrac{1}{6}q_1^3) - \sin ht.\, q_1 q_2)\,\varepsilon^3$$
$$+ (\cos ht(q_4 - \tfrac{1}{2}q_1^2 q_2) - \sin ht(q_1 q_3 + \tfrac{1}{2}q_2^2 - \tfrac{1}{24}q_1^4))\,\varepsilon^4 \ldots,$$

$$\cos\theta = \cos ht\cos\theta' - \sin ht\sin\theta' = \cos ht - \sin ht.\, q_1\,\varepsilon - (\sin ht.\, q_2 + \tfrac{1}{2}\cos ht.\, q_1^2)\,\varepsilon^2 - (\sin ht(q_3 - \tfrac{1}{6}q_1^3) + \cos ht.\, q_1 q_2)\,\varepsilon^3$$
$$- (\sin ht(q_4 - \tfrac{1}{2}q_1^2 q_2) + \cos ht(q_1 q_3 + \tfrac{1}{2}q_2^2 - \tfrac{1}{24}q_1^4))\,\varepsilon^4 \ldots$$

und demnach

$$\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta = T^2\cos ht + (2TP_1\cos ht - T^2\sin ht.\, q_1)\,\varepsilon + ((2TP_2 + P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2)\cos ht - 2TP_1\sin ht.\, q_1 - T^2(\sin ht.\, q_2 + \tfrac{1}{2}\cos ht.\, q_1^2))\,\varepsilon^2 \ldots,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta = TF_1\sin ht.\,\varepsilon + ((TF_2 + P_1F_1)\sin ht + TF_1\cos ht.\, q_1)\,\varepsilon^2 \ldots.$$

Die Gleichungen (K) aber verwandeln sich durch Substitution dieser Ausdrücke in folgende:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial t}.\,\varepsilon + \frac{\partial P_2}{\partial t}.\,\varepsilon^2 + \frac{\partial P_3}{\partial t}.\,\varepsilon^3 \ldots = -\mu T^2 - 2\mu TP_1.\,\varepsilon - \mu(2TP_2 + P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2)\,\varepsilon^2 - \mu(2TP_3 + 2P_1P_2 + F_1F_2)\,\varepsilon^3 \ldots$$
$$+ \frac{\partial^2 \sin ht}{\partial t^2}.\,\varepsilon + \frac{\partial^2(\cos ht.\, q_1)}{\partial t^2}.\,\varepsilon^2 + \frac{\partial^2(\cos ht.\, q_2 - \tfrac{1}{2}\sin ht.\, q_1^2)}{\partial t^2}.\,\varepsilon^3 \ldots,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}.\,\varepsilon + \frac{\partial F_2}{\partial t}.\,\varepsilon^2 + \frac{\partial F_3}{\partial t}.\,\varepsilon^3 \ldots = -\mu TF_1.\,\varepsilon - \mu(TF_2 + P_1F_1)\,\varepsilon^2 - \mu(TF_3 + P_1F_2 + P_2F_1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{F_1^3}{T})\,\varepsilon^3 \ldots$$
$$+ \frac{\partial^2 \cos ht}{\partial t^2}.\,\varepsilon - \frac{\partial^2(\sin ht.\, q_1)}{\partial t^2}.\,\varepsilon^2 - \frac{\partial^2(\sin ht.\, q_2 + \tfrac{1}{2}\cos ht.\, q_1^2)}{\partial t^2}.\,\varepsilon^3 \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2}.\,\varepsilon + \frac{\partial^2 q_2}{\partial t^2}.\,\varepsilon^2 + \frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2}.\,\varepsilon^3 \ldots =$$
$$-\frac{\mu}{\rho}T^2\cos ht.\,\varepsilon - \frac{\mu}{\rho}(2TP_1\cos ht - T^2\sin ht.\, q_1)\,\varepsilon^2 - \frac{\mu}{\rho}((2TP_2 + P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2)\cos ht - 2TP_1\sin ht.\, q_1 - T^2(\sin ht.\, q_2 + \tfrac{1}{2}\cos ht.\, q_1^2))\,\varepsilon^3 \ldots$$
$$+ \frac{\mu}{\rho}TF_1\sin ht.\,\varepsilon^2 + \frac{\mu}{\rho}((TF_2 + P_1F_1)\sin ht + TF_1\cos ht.\, q_1)\,\varepsilon^3 \ldots,$$

und zerfallen, da sie für jeden Werth von ε gelten müssen, in nachstehende Gruppen je nach $P_1, P_2 \ldots F_1, F_2 \ldots q_1, q_2 \ldots$ linearer Gleichungen:

(L)

1) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\mu T^2,$

2) $\dfrac{\partial P_1}{\partial t} + 2\mu TP_1 = \dfrac{\partial^2 \sin ht}{\partial t^2},$

3) $\dfrac{\partial P_2}{\partial t} + 2\mu TP_2 = -\mu(P_1^2 + \tfrac{1}{2}F_1^2) + \dfrac{\partial^2(\cos ht.\, q_1)}{\partial t^2},$

4) $\dfrac{\partial P_3}{\partial t} + 2\mu TP_3 = -\mu(2P_1P_2 + F_1F_2) + \dfrac{\partial^2(\cos ht.\, q_2 - \tfrac{1}{2}\sin ht.\, q_1^2)}{\partial t^2},$

u. s. f.

(M)

1) $\dfrac{\partial F_1}{\partial t} + \mu TF_1 = \dfrac{\partial^2 \cos ht}{\partial t^2},$

2) $\dfrac{\partial F_2}{\partial t} + \mu TF_2 = -\mu P_1F_1 - \dfrac{\partial^2(\sin ht.\, q_1)}{\partial t^2},$

3) $\dfrac{\partial F_3}{\partial t} + \mu TF_3 = -\mu(P_1F_2 + P_2F_1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{F_1^3}{T}) - \dfrac{\partial^2(\sin ht.\, q_2 + \tfrac{1}{2}\cos ht.\, q_1^2)}{\partial t^2},$

u. s. w.

(N) 1) $\frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{\varrho} T^2 \cos ht,$

2) $\frac{\partial^2 Q_2}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\varrho} T^2 \sin ht \cdot Q_1 - \frac{\mu}{\varrho} T(2 P_1 \cos ht - F_1 \sin ht),$

3) $\frac{\partial^2 Q_3}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\varrho} T^2 (\sin ht \cdot Q_2 + \tfrac{1}{2}\cos ht \cdot Q_1^2) + \frac{\mu}{\varrho} T Q_1 (2 P_1 \sin ht + F_1 \cos ht) - \frac{\mu}{\varrho}(\cos ht (2 T P_2 + P_1^2 + \tfrac{1}{4} F_1^2) - \sin ht (T F_2 + P_1 F_1)),$

u. s. w.

auf deren Integration nunmehr die der Gleichungen (K) zurückgebracht ist.

§45.

Indem man $i = 2$ und $\theta = ht$ setzt, ergibt sich aus §31 unmittelbar

$$T = \frac{f}{1+\mu f t},$$

$$P_1 = h\left[\cos ht - 2\frac{\mu f}{h} \cdot \frac{\sin ht}{1+\mu f t} - \frac{1 - 2\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2 (1-\cos ht)}{(1+\mu f t)^2}\right],$$

$$F_1 = h\left[-\sin ht + \frac{\mu f}{h} \cdot \frac{1-\cos ht}{1+\mu f t}\right],$$

und eben so aus §33, 34

$$\int T \partial t = \frac{1}{\mu} \log (1+\mu f t),$$

$$\int P_1 \partial t = \sin ht - \frac{ht}{1+\mu f t} - \frac{\mu f}{h} \cdot \frac{2(1-\cos ht)}{1+\mu f t},$$

$$\int F_1 \partial t = \log (1+\mu f t) - 1 + \cos ht - \mu f \int \frac{\cos ht}{1+\mu f t} \partial t.$$

Der Integral-Ausdruck $\int \frac{\cos ht}{1+\mu f t} \partial t$, welcher in $\int F_1 \partial t$ also mit t zugleich verschwindend zu nehmen ist, läßt sich, wie die analogen Functionen $\int \frac{\cos x}{x} \partial x$, $\int \frac{\sin x}{x} \partial x$, $\int \frac{e^x}{x} \partial x$, nicht allgemein in geschlossener Form darstellen.

Man findet durch theilweises Integriren

$$\int \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^n} \partial t = \frac{1}{h} \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^n} + n \frac{\mu f}{h^2}\left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^{n+1}}\right) - n(n+1) \frac{(\mu f)^2}{h^3} \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^{n+2}} - n(n+1)(n+2)\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3 \int \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^{n+3}} \partial t,$$

$$\int \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^n} \partial t = \frac{1}{h}\left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^n}\right) - n \frac{\mu f}{h^2} \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^{n+1}} - n(n+1) \frac{(\mu f)^2}{h^3}\left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^{n+2}}\right) + n(n+1)(n+2)\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3 \int \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^{n+3}} \partial t,$$

und auf gleiche Weise

$$\int \frac{ht \cos ht}{(1+\mu f t)^n} \partial t = \frac{1}{h}\left(\frac{\cos ht + ht \sin ht}{(1+\mu f t)^n} - 1\right) + n \frac{\mu f}{h^2} \frac{2 \sin ht - ht \cos ht}{(1+\mu f t)^{n+1}} - n(n+1) \frac{(\mu f)^2}{h^3}\left(\frac{3 \cos ht + ht \sin ht}{(1+\mu f t)^{n+2}} - 3\right)$$
$$- n(n+1)(n+2)\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3 \int \frac{3 \cos ht + ht \sin ht}{(1+\mu f t)^{n+3}} \partial t,$$

$$\int \frac{ht \sin ht}{(1+\mu f t)^n} \partial t = \frac{1}{h} \frac{\sin ht - ht \cos ht}{(1+\mu f t)^n} - n \frac{\mu f}{h^2} \left(\frac{2 \cos ht + ht \sin ht}{(1+\mu f t)^{n+1}} - 2 \right) - n(n+1) \frac{(\mu f)^2}{h^3} \frac{3 \sin ht - ht \cos ht}{(1+\mu f t)^{n+2}}$$

$$- n(n+1)(n+2) \left(\frac{\mu f}{h}\right)^3 \int \frac{3 \sin ht - ht \cos ht}{(1+\mu f t)^{n+3}} \partial t.$$

Die in Reihenform auf solche Art erhaltenen Integrale werden zwar nur bis zu einem gewissen Gliede convergiren und von da an divergiren; man wird aber dennoch für grössere Werthe der Anfangsgeschwindigkeit h die Annäherung immer so weit, als es die Anwendung fordert, treiben können.

Indem man von diesem Verfahren Gebrauch macht, giebt die Gleichung (N) 1)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\frac{\mu}{\varsigma} \frac{f^2}{h} \left[\frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^2} + 2 \frac{\mu f}{h} \left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^3}\right) - 6 \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2 \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^4} - 24 \frac{(\mu f)^3}{h^2} \int \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^5} \partial t \right],$$

$$\varphi_1 = -\frac{\mu}{\varsigma} \left(\frac{f}{h}\right)^2 \left[1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^2} + 2 \frac{\mu f}{h} \left(ht - \frac{2 \sin ht}{(1+\mu f t)^3} \right) - 18 \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\right) + 72 \frac{(\mu f)^3}{h^2} \int \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^5} \partial t - 24 \frac{(\mu f)^3}{h} \int \partial t \int \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^5} \partial t \right].$$

§46.

Nach der Methode der Variation der Constanten (§31, 32) erhält man aus der Gleichung (L) 3)

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{C_2}{(1+\mu f t)^2}, \text{ und } \frac{\frac{\partial C_2}{\partial t}}{(1+\mu f t)^2} = -\mu \left(\mathfrak{P}_1^2 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2\right) + \frac{\partial^2 (\cos ht . \varphi_1)}{\partial t^2},$$

daher $C_2 = -\mu \int (1+\mu f t)^2 \mathfrak{P}_1^2 \partial t - \mu \int (1+\mu f t)^2 . \tfrac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2 \partial t + \int (1+\mu f t)^2 \frac{\partial^2 (\cos ht . \varphi_1)}{\partial t^2} \partial t,$

oder, indem man das erste und dritte Glied theilweise integrirt, und in Betreff des ersten bemerkt, dass

$$\frac{\partial (\mathfrak{P}_1 (1+\mu f t)^2)}{\partial t} = (1+\mu f t)^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t} + \frac{2 \mu f}{1+\mu f t} \mathfrak{P}_1 \right) = (1+\mu f t)^2 \frac{\partial^2 \sin ht}{\partial t^2} = -(1+\mu f t)^2 h^2 \sin ht \text{ ist,}$$

$$C_2 = -\mu \left((1+\mu f t)^2 \mathfrak{P}_1 \int \mathfrak{P}_1 \partial t + h^2 \int \sin ht (1+\mu f t)^2 \left(\int \mathfrak{P}_1 \partial t\right) \partial t + \int (1+\mu f t)^2 \tfrac{1}{2} \mathfrak{F}_1^2 \partial t \right)$$

$$+ (1+\mu f t)^2 \frac{\partial (\cos ht . \varphi_1)}{\partial t} - 2 \mu f (1+\mu f t) \cos ht . \varphi_1 + 2 (\mu f)^2 \int \cos ht . \varphi_1 \partial t.$$

Wird die Rechnung weiter ausgeführt und C_2 durch $(1+\mu f t)^2$ dividirt, so findet sich

$$\mathfrak{P}_2 = -\mu h \left[\tfrac{3}{4} ht + \tfrac{1}{8} \sin 2ht - \frac{2 \sin ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{ht}{(1+\mu f t)^3} + \frac{\mu f}{h} \left(\frac{-\frac{3}{4}(ht)^2 - 1 + \cos ht - \frac{7}{4} (\sin ht)^2}{1+\mu f t} + \frac{4(1 - \cos ht)}{(1+\mu f t)^3} \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2 . \frac{\frac{1}{4}(ht)^3 + \frac{27}{8} ht + 2 \sin ht - \frac{37}{16} \sin 2ht}{(1+\mu f t)^2} - \left(\frac{\mu f}{h}\right)^3 . \frac{4(1-\cos ht)^2}{(1+\mu f t)^3} \right]$$

$$+ \frac{\partial (\cos ht . \varphi_1)}{\partial t} - \frac{2 \mu f}{1+\mu f t} \cos ht . \varphi_1 + 2 \left(\frac{\mu f}{1+\mu f t}\right)^2 \int \cos ht . \varphi_1 \partial t.$$

Und weil nach der Gleichung ($\mathfrak{L}$) 3)

$$\mathfrak{P}_2 = -\frac{1+\mu f t}{2\mu f}\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_2}{\partial t} + \mu\left(\mathfrak{P}_1^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}_1^2\right) - \frac{\partial^2(\cos ht.\, q_1)}{\partial t^2}\right) \text{ ist,}$$

so hat man

$$\int \mathfrak{P}_2 \partial t = -\frac{1+\mu f t}{2\mu f}\mathfrak{P}_2 + \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{P}_2 \partial t - \tfrac{1}{2f}\int (1+\mu f t)\mathfrak{P}_1^2 \partial t - \tfrac{1}{2f}\int (1+\mu f t)\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}_1^2 \partial t + \frac{1}{2\mu f}\int (1+\mu f t)\frac{\partial^2(\cos ht.\, q_1)}{\partial t^2}\partial t$$

$$= -\frac{1+\mu f t}{\mu f}\mathfrak{P}_2 - \tfrac{1}{f}\Big((1+\mu f t)\mathfrak{P}_1\int \mathfrak{P}_1 \partial t + \tfrac{\mu f}{2}\left(\int \mathfrak{P}_1 \partial t\right)^2 + \int h^2 \sin ht (1+\mu f t)\left(\int \mathfrak{P}_1 \partial t\right)\partial t + \int (1+\mu f t)\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}_1^2 \partial t\Big)$$

$$+ \tfrac{1}{\mu f}\left((1+\mu f t)\frac{\partial(\cos ht.\, q_1)}{\partial t} - \mu f \cos ht.\, q_1\right),$$

indem $\dfrac{\partial((1+\mu f t)\mathfrak{P}_1)}{\partial t} = (1+\mu f t)\left(\dfrac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial t} + \dfrac{2\mu f}{1+\mu f t}\mathfrak{P}_1\right) - \mu f \mathfrak{P}_1 = -h^2 \sin ht (1+\mu f t) - \mu f \mathfrak{P}_1$ und $\int \mathfrak{P}_1\left(\int \mathfrak{P}_1 \partial t\right)\partial t = \tfrac{1}{2}\left(\int \mathfrak{P}_1 \partial t\right)^2$ ist,

und somit durch weitere Rechnung

$$\int \mathfrak{P}_2 \partial t = -\mu\Big[\tfrac{3}{8}(ht)^2 + \tfrac{1}{8}(\sin ht)^2 + \tfrac{3}{4}\log(1+\mu f t) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{ht}{1+\mu f t}\right)^2 - \frac{2(1-\cos ht)}{(1+\mu f t)^2} + \frac{\mu f}{h}\cdot\frac{-\frac{1}{4}(ht)^3 - \frac{21}{8}ht + \sin ht + \frac{7}{16}\sin 2ht}{1+\mu f t}$$

$$+ 2\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{1-\cos ht}{1+\mu f t}\right)^2 - \frac{(\mu f)^2}{h}\int \frac{\sin ht - \frac{1}{8}\sin 2ht}{(1+\mu f t)^2}\partial t\Big]$$

$$+ \cos ht.\, q_1 - \frac{2\mu f}{1+\mu f t}\int \cos ht.\, q_1 \partial t.$$

Es gibt ferner die Gleichung ($\mathfrak{M}$) 2)

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{\mathfrak{R}_2}{1+\mu f t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{R}_2}{\partial t} = -\mu(1+\mu f t)\mathfrak{P}_1\mathfrak{F}_1 - (1+\mu f t)\frac{\partial^2(\sin ht.\, q_1)}{\partial t^2}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{R}_2 = -\mu\left((1+\mu f t)\mathfrak{F}_1\int \mathfrak{P}_1 \partial t + \int h^2 \cos ht (1+\mu f t)\left(\int \mathfrak{P}_1 \partial t\right)\partial t\right) - (1+\mu f t)\frac{\partial(\sin ht.\, q_1)}{\partial t} + \mu f \sin ht.\, q_1,$$

indem $\dfrac{\partial(\mathfrak{F}_1(1+\mu f t))}{\partial t} = (1+\mu f t)\left(\dfrac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial t} + \dfrac{\mu f}{1+\mu f t}\mathfrak{F}_1\right) = -h^2 \cos ht (1+\mu f t)$ ist.

Daher hat man

$$\mathfrak{F}_2 = -\mu h\left[-\tfrac{1}{2}(\sin ht)^2 + \frac{1-\cos ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{\mu f}{h}\cdot\frac{\frac{3}{4}ht + \sin ht - \frac{7}{8}\sin 2ht}{1+\mu f t} - 2\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{1-\cos ht}{1+\mu f t}\right)^2\right]$$

$$- \frac{\partial(\sin ht.\, q_1)}{\partial t} + \frac{\mu f}{1+\mu f t}\sin ht.\, q_1,$$

und findet hieraus weiter

$$\int \mathfrak{F}_2 \partial t = -\mu\Big[\tfrac{1}{2}ht + \tfrac{1}{8}\sin 2ht - \tfrac{3}{4}\tfrac{h}{\mu f}\log(1+\mu f t) + \frac{ht}{1+\mu f t} - \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{\mu f}{h}\left(-2 + \frac{\frac{1}{8} - \cos ht + \frac{7}{8}(\cos ht)^2}{1+\mu f t} + \frac{2\cos ht}{(1+\mu f t)^3}\right)$$

$$- \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{\frac{39}{16}ht}{1+\mu f t} + \frac{(\mu f)^2}{h}\left(\int \frac{3\cos ht - \frac{9}{16}\cos 2ht}{(1+\mu f t)^2}\partial t + \int \frac{6\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\partial t\right)\Big]$$

$$- \sin ht.\, q_1 + \mu f\int \frac{\sin ht.\, q_1}{1+\mu f t}\partial t.$$

Aus der Gleichung (N) 2) aber wird gefunden

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = -\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \frac{f^4}{k^3}\left[\frac{1}{4} - \frac{\cos kt}{1+\mu ft} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2kt}{(1+\mu ft)^4} + \frac{\mu f}{k}\left(\frac{-kt\cos kt}{(1+\mu ft)^2} + \frac{\frac{3}{2}\sin 2kt}{(1+\mu ft)^5}\right) - \left(\frac{\mu f}{k}\right)^2 \frac{2kt\sin kt}{(1+\mu ft)^3}\ldots\right]$$

$$-\frac{\mu}{\varrho} f^2\left[\frac{3}{2}\frac{k}{\mu f}\log(1+\mu ft) + \frac{1}{4}\frac{\sin 2kt}{1+\mu ft} - \frac{2\sin kt}{(1+\mu ft)^3} + \frac{\mu f}{k}\left(-\frac{69}{8} + \frac{1+\cos kt+\frac{5}{8}\cos 2kt}{(1+\mu ft)^2} + \frac{6\cos kt}{(1+\mu ft)^4}\right)\ldots\right],$$

$$Q_2 = -\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2\left(\frac{f}{k}\right)^4\left[\frac{1}{4}kt - \frac{\sin kt}{1+\mu ft} + \frac{\frac{1}{2}kt}{(1+\mu ft)^2} + \frac{\frac{1}{8}\sin 2kt}{(1+\mu ft)^4} + \frac{\mu f}{k}\left(1 - \frac{kt\sin kt}{(1+\mu ft)^2} - \frac{\cos 2kt}{(1+\mu ft)^5}\right) + \left(\frac{\mu f}{k}\right)^2\left(\frac{23}{4}kt + \frac{\frac{1}{6}(kt)^3 + 4kt\cos kt}{(1+\mu ft)^3}\right)\ldots\right]$$

$$-\frac{\mu}{\varrho}\frac{f}{k}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{k}{\mu f}\right)^2(1+\mu ft)\log(1+\mu ft) - \frac{3}{2}\frac{k}{\mu f}kt - \frac{7}{3} - \frac{1+\frac{1}{8}\cos 2kt}{1+\mu ft} + \frac{2\cos kt}{(1+\mu ft)^3} + \frac{\mu f}{k}\left(-\frac{69}{8}kt + \frac{\sin kt+\frac{1}{4}\sin 2kt}{(1+\mu ft)^2} + \frac{12\sin kt}{(1+\mu ft)^4}\right)\ldots\right],$$

welche letzteren beiden Integrale nur bis auf die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{k}$ einschließlich innerhalb der Klammern [] genau angegeben sind.

§ 47.

Durch ein dem im vorigen § angewandten ähnliches Verfahren läßt sich ferner die Berechnung der weitern Coefficienten P_3, F_3, $\frac{\partial Q_3}{\partial t}$ $\int P_3 dt$, $\int F_3 dt$, Q_3, welche aber der Natur der Sache gemäß immer zusammengesetzter und umständlicher wird, bewerkstelligen.

Werden die berechneten Coefficienten zum Behuf der Übersicht zusammengestellt, so hat man

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F + P_1 \cdot \varepsilon + P_2 \cdot \varepsilon^2 + P_3 \cdot \varepsilon^3 + \ldots\ldots,$$

$$F = \frac{f}{1+\mu ft},$$

$$P_1 = k\left[\cos kt - 2\frac{\mu f}{k}\frac{\sin kt}{1+\mu ft} - \frac{1-2\left(\frac{\mu f}{k}\right)^2(1-\cos kt)}{(1+\mu ft)^2}\right],$$

$$P_2 = -\mu k\left[\frac{3}{4}kt + \frac{1}{8}\sin 2kt - \frac{2\sin kt}{(1+\mu ft)^2} + \frac{kt}{(1+\mu ft)^3} + \frac{\mu f}{k}\left(\frac{-\frac{3}{4}(kt)^2 - 1 + \cos kt - \frac{7}{4}(\sin kt)^2}{1+\mu ft} + \frac{4(1-\cos kt)}{(1+\mu ft)^3}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu f}{k}\right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}(kt)^3 + \frac{21}{8}kt + 2\sin kt - \frac{37}{16}\sin 2kt}{(1+\mu ft)^2} - \left(\frac{\mu f}{k}\right)^3 \cdot \frac{4(1-\cos kt)^2}{(1+\mu ft)^3}\right]$$

$$-\frac{\mu}{\varrho}k\left(\frac{f}{k}\right)^2\left[-\sin kt + \frac{\sin 2kt}{(1+\mu ft)^2} + 2\frac{\mu f}{k}\left(-kt\sin kt + \frac{1-\cos 2kt}{(1+\mu ft)^3}\right) - \left(\frac{\mu f}{k}\right)^2\left(\frac{2kt\cos kt}{1+\mu ft} + \frac{kt}{(1+\mu ft)^3}\right)\ldots\ldots\right],$$

$$P_3 = \mu^2 k\left[\frac{3}{2}kt\sin kt + \cos kt + \frac{2kt\sin kt - \frac{3}{4}(kt)^2 + 3\cos kt + \frac{7}{8}\cos 2kt - \frac{39}{8}}{(1+\mu ft)^2} + \frac{4(1-\cos kt) - (kt)^2}{(1+\mu ft)^4}\right.$$

$$+ \frac{\mu f}{k}\left(\frac{\frac{1}{2}kt + \frac{15}{4}kt\cos kt - \frac{3}{2}(kt)^2\sin kt - \frac{21}{4}\sin kt - \frac{3}{4}(\sin kt)^3 + \frac{7}{3}\sin 2kt}{1+\mu ft} + \frac{\frac{1}{2}(kt)^3 - 2(kt)^2\sin kt + \frac{21}{4}kt + 4\sin kt - \frac{37}{3}\sin 2kt}{(1+\mu ft)^3}\right)$$

$$\left. + \left(\frac{\mu f}{k}\right)^2\left(\frac{\frac{7}{4}(kt)^2 + \frac{1}{2}(kt)^3\sin kt - 3(kt)^2\cos kt + \frac{15}{4}kt\sin kt}{(1+\mu ft)^2} + \frac{2(kt)^2(1-\cos kt)}{(1+\mu ft)^4}\right) - \left(\frac{\mu f}{k}\right)^3\frac{(kt)^3(1-\cos kt)}{(1+\mu ft)^3}\ldots\right]$$

$$+\frac{\mu^2}{\varrho}h\left(\frac{f}{h}\right)^2\Big[\tfrac{1}{4}\cos 2ht+\frac{\frac{24}{12}-3\cos ht-\frac{2}{3}(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\cos 2ht}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\tfrac{1}{2}ht\cos 2ht-\tfrac{1}{4}\sin 2ht+\frac{3ht-\sin ht-\frac{5}{4}\sin 2ht}{1+\mu ft}-\frac{4ht\cos ht-3\sin ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\frac{1}{2}\sin 2ht-(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^3}\frac{4ht}{(1+\mu ft)^4}+\frac{3\sin 3ht}{(1+\mu ft)^5}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(-\frac{2ht\sin ht+3ht\sin 2ht}{1+\mu ft}+\frac{3ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{(ht)^2}{(1+\mu ft)^4}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\frac{(ht)^3}{(1+\mu ft)^2}\cdots\cdots\Big]$$

$$-\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 h\left(\frac{f}{h}\right)^4\Big[\tfrac{3}{4}\cos ht-\tfrac{1}{4}ht\sin ht-\frac{\frac{1}{2}ht\sin ht+2\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{\cos ht-\frac{9}{4}(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\sin ht+2ht\cos ht-\frac{\sin ht+\frac{1}{2}ht\cos ht}{1+\mu ft}-\frac{2\sin 2ht+4ht\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht\cos ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{\frac{17}{2}\sin ht-\frac{27}{2}(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^5}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(2(ht)^2\cos ht-\tfrac{20}{4}ht\sin ht+\frac{\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{\frac{1}{4}(ht)^3\sin ht+4ht\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{ht\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{3}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu ft)^4}+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^4\cdot\frac{\frac{1}{3}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu ft)^5}\cdots\Big]$$

$$-\frac{\mu}{\varrho}h\frac{f}{h}\Big[-\tfrac{9}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2(1+\mu ft)\log(1+\mu ft)\sin ht-\tfrac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu ft)\cos ht+\tfrac{3}{2}\frac{h}{\mu f}ht\sin ht+\tfrac{7}{8}\sin ht+\frac{9\log(1+\mu ft)\sin ht+3ht\cos ht+\frac{13}{8}\sin ht-\frac{3}{4}(\sin ht)^3}{1+\mu ft}$$

$$-\frac{2\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{6g}{8}(ht\sin ht-\cos ht)+\frac{\frac{7}{4}\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{9\log(1+\mu ft)\cos ht-3ht\sin ht+\frac{13}{8}\cos ht+\frac{9}{4}(\cos ht)^3+\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{7\cos 2ht-5}{(1+\mu ft)^4}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{6g}{4}\frac{ht\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{2ht}{(1+\mu ft)^4}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\frac{(ht)^2}{(1+\mu ft)^4}\cdots\cdots\cdots\Big],$$

u. s. w. f.

$$x=\int^t\mathfrak{F}\partial t+\int^t\mathfrak{P}_1\partial t.\,\varepsilon+\int^t\mathfrak{P}_2\partial t.\,\varepsilon^2+\int^t\mathfrak{P}_3\partial t.\,\varepsilon^3+\ldots,$$

$$\int^t\mathfrak{F}\partial t=\frac{1}{\mu}\log(1+\mu ft),$$

$$\int^t\mathfrak{P}_1\partial t=\sin ht-\frac{ht}{1+\mu ft}-\frac{\mu f}{h}\cdot\frac{2(1-\cos ht)}{1+\mu ft},$$

$$\int^t\mathfrak{P}_2\partial t=-\mu\Big[\tfrac{3}{8}(ht)^2+\tfrac{1}{8}(\sin ht)^2+\tfrac{3}{4}\log(1+\mu ft)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^2-\frac{2(1-\cos ht)}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\mu f}{h}\cdot\frac{-\frac{1}{4}(ht)^3-\frac{21}{8}ht+\sin ht+\frac{7}{16}\sin 2ht}{1+\mu ft}$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot 2\left(\frac{1-\cos ht}{1+\mu ft}\right)^2-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\int^t\frac{\sin ht-\frac{1}{8}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2}\partial t\Big]$$

$$+\cos ht.\,\varphi_1-\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{f}{h}\right)^2\Big[\frac{\mu f}{h}\left(\frac{ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{2\sin ht}{1+\mu ft}+\frac{\frac{1}{2}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\frac{4ht\sin ht}{1+\mu ft}\cdots\Big],$$

$$\int^t\mathfrak{P}_3\partial t=\mu^2\Big[-\tfrac{3}{2}ht\cos ht+\tfrac{5}{2}\sin ht-\tfrac{3}{4}\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu ft)-\frac{33}{8}\frac{ht}{1+\mu ft}-\frac{\frac{1}{4}(ht)^3+2ht\cos ht-5\sin ht-\frac{7}{16}\sin 2ht}{2(1+\mu ft)^2}-\frac{\frac{1}{3}(ht)^3-4ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{4\sin ht}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{\frac{1}{2}(ht)^2+\frac{3}{2}(ht)^2\cos ht+3/4\,ht\sin ht}{1+\mu ft}+\frac{21}{8}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^2+\frac{4(ht)^2+2(ht)^2\cos ht-8ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(-\frac{\frac{1}{2}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{5}{2}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^3+\frac{4(ht)^2\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{2}(ht)^4}{(1+\mu ft)^3}\cdots\cdots\Big]$$

$$+\frac{\mu^2}{\varsigma}\left(\frac{f}{h}\right)^3\Big[\frac{29}{12}\frac{ht}{1+\mu ft}+\frac{7}{8}\sin 2ht-\frac{\frac{11}{3}\sin ht-\frac{2}{9}(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\frac{1}{2}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{3}{2}(ht)^2+\frac{1}{4}ht\sin 2ht-\frac{4ht\sin ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{2(ht)^2}{(1+\mu ft)^3}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{(ht)^3}{1+\mu ft}+\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^3\right)\cdots\cdots\Big]$$

$$+\cosh t.\,q_2-\frac{1}{2}\sin ht.\,q_1^2-\left(\frac{\mu}{\varsigma}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^4\Big[\frac{\mu f}{h}\left(\frac{1+\frac{1}{2}\cos ht-\frac{1}{2}ht\sin ht}{1+\mu ft}-\frac{\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{\cos ht-\frac{1}{2}(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^5}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(4ht\cos ht+\frac{4ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{3}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\cdots\Big]$$

$$-\frac{\mu}{\varsigma}\frac{f}{h}\Big[-3\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu ft)\sin ht-3\,\frac{\log(1+\mu ft)\cos ht-ht\sin ht}{1+\mu ft}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{\frac{7}{4}\sin ht}{1+\mu ft}+\frac{\frac{21}{4}\sin ht-\frac{1}{8}(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^2}-\frac{2ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{\sin 2ht}{(1+\mu ft)^4}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{69}{4}\frac{ht\sin ht}{1+\mu ft}-\frac{(ht)^2}{(1+\mu ft)^3}\right)\cdots\Big],$$

u. s. w.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\mathfrak{F}_1.\,\varepsilon+\mathfrak{F}_2.\,\varepsilon^2+\mathfrak{F}_3.\,\varepsilon^3+\cdots,$$

$$\mathfrak{F}_1=h\left[-\sin ht+\frac{\mu f}{h}\cdot\frac{1-\cos ht}{1+\mu ft}\right],$$

$$\mathfrak{F}_2=-\mu h\Big[-\frac{1}{2}(\sin ht)^2+\frac{1-\cos ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\mu f}{h}\cdot\frac{\frac{3}{4}ht+\sin ht-\frac{7}{8}\sin 2ht}{1+\mu ft}-2\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{1-\cos ht}{1+\mu ft}\right)^2\Big]$$

$$-\frac{\mu}{\varsigma}h\left(\frac{f}{h}\right)^2\Big[\cos ht-\frac{\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\mu f}{h}\left(2ht\cos ht+\frac{\sin ht}{1+\mu ft}-\frac{5}{2}\frac{\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)\cdots\cdots\Big],$$

$$\mathfrak{F}_3=\mu^2h\Big[-\frac{h}{\mu f}(1+\mu ft)\left(\frac{1}{2}\cos ht-\frac{1}{6}(\cos ht)^3\right)+\frac{h}{\mu f}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1+\mu ft}+\frac{3}{4}ht\cos ht-\frac{1}{12}\sin ht+\frac{13}{36}(\sin ht)^3+\frac{3}{8}\sin 2ht+\frac{\sin ht-\frac{7}{8}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht(1-\cos ht)}{(1+\mu ft)^3}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{-\frac{3}{4}(ht)^2\cos ht+\frac{2}{4}ht\sin ht-\frac{39}{8}\log(1+\mu ft)-\frac{38}{9}\cos ht+\frac{26}{27}(\cos ht)^3+\frac{7}{3}\cos 2ht-\frac{781}{216}}{1+\mu ft}-\frac{3}{4}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^2+\frac{8\cos ht-2\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{6ht-\frac{1}{4}(ht)^3(1-\cos ht)-\frac{33}{8}ht\cos ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{6ht}{(1+\mu ft)^3}\right)\cdots\cdots\Big]$$

$$+\frac{\mu^2}{\varsigma}h\left(\frac{f}{h}\right)^2\Big[-\frac{1}{2}\sin 2ht+\frac{2\sin ht}{1+\mu ft}-\frac{4}{3}\frac{(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^2}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2ht}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(1+\cos ht-ht\sin 2ht-\frac{5}{4}\cos 2ht-\frac{\frac{23}{16}}{1+\mu ft}+\frac{\cos ht-\frac{1}{2}}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\frac{4}{3}\cos ht-\frac{13}{9}(\cos ht)^3-\frac{1}{2}\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{2(1-\cos 2ht)}{(1+\mu ft)^5}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{ht\cos ht-\frac{7}{4}ht\cos 2ht}{1+\mu ft}+\frac{\frac{3}{2}ht-2ht\cos ht}{(1+\mu ft)^3}\right)\cdots\cdots\Big]$$

$$+\left(\frac{\mu}{\varsigma}\right)^2h\left(\frac{f}{h}\right)^4\Big[\frac{1}{4}ht\cos ht+\frac{3}{4}\sin ht-\frac{2\sin 2ht}{1+\mu ft}+\frac{\frac{1}{2}ht\cos ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\frac{5}{2}\sin ht-\frac{9}{4}(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(2ht\sin ht-\cos ht+\frac{\frac{1}{2}\cos ht-\frac{3}{4}ht\sin ht}{1+\mu ft}+\frac{4\cos 2ht-2ht\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{\cos 2ht+\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{\frac{27}{4}\cos ht-\frac{57}{4}(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^5}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(2(ht)^2\sin ht+\frac{15}{4}ht\cos ht+\frac{\frac{1}{6}(ht)^3\cos ht+4ht\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{6}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\ldots\ldots\Big]$$

$$+\frac{\mu}{\varrho}h\frac{f}{h}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2(1+\mu ft)\log(1+\mu ft)\cos ht-\frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}ht\cos ht-\frac{7}{8}\cos ht+\frac{\frac{3}{2}ht\sin ht-\frac{3}{8}\cos ht-\frac{3}{4}(\cos ht)^3}{1+\mu ft}+\frac{2\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{\mu f}{h}\left(-\frac{69}{8}ht\cos ht-\frac{31}{4}\sin ht+\frac{\sin 2ht+\frac{13}{4}\sin ht-2(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^2}+\frac{8\sin 2ht}{(1+\mu ft)^4}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{31}{4}\frac{ht\sin ht}{1+\mu ft}\ldots\right],$$

u. s. w.

$$z=\int F_1\partial t.\,\varepsilon+\int F_2\partial t.\,\varepsilon^2+\int F_3\partial t.\,\varepsilon^3+\ldots,$$

$$\int F_1\partial t=\log(1+\mu ft)-1+\cos ht-\mu f\int\frac{\cos ht}{1+\mu ft}\partial t,$$

$$\int F_2\partial t=-\mu\left[\frac{1}{2}ht+\frac{1}{8}\sin 2ht-\frac{3}{4}\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu ft)+\frac{ht}{1+\mu ft}-\frac{\sin ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\mu f}{h}\left(-2+\frac{1/8-\cos ht+7/8(\cos ht)^2}{1+\mu ft}+\frac{2\cos ht}{(1+\mu ft)^3}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{\frac{39}{16}ht}{1+\mu ft}+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\int\frac{3\cos ht-9/16\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}\partial t+\int\frac{6\cos ht}{(1+\mu ft)^4}\partial t\right)\right]$$

$$-\sin ht.\,\varphi_1-\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{f}{h}\right)^2\left[\frac{\mu f}{h}\left(\frac{1}{12}-\frac{\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{2ht\cos ht}{1+\mu ft}\ldots\right],$$

$$\int F_3\partial t=\mu^2\left[\frac{13}{12}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\log(1+\mu ft)-\frac{3}{4}\frac{h}{\mu f}.ht-\frac{1}{8}(ht)^2-\frac{h}{\mu f}(1+\mu ft)\left(\frac{1}{3}\sin ht+\frac{1}{18}(\sin ht)^3\right)+\frac{3}{4}ht\sin ht+\frac{1}{12}\cos ht+\frac{5}{36}(\cos ht)^3-\frac{3}{16}\cos 2ht\right.$$

$$+6\log(1+\mu ft)-\frac{37}{16}(\log(1+\mu ft))^2-\frac{17}{36}+\frac{7/16\cos 2ht-\cos ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{ht\sin ht+\cos ht}{(1+\mu ft)^3}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(-\frac{6ht+\frac{3}{4}(ht)^2\sin ht+9/4\,ht\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{1/2(ht)^3}{(1+\mu ft)^2}-\frac{3ht\cos ht}{(1+\mu ft)^4}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{4}(ht)^3\sin ht+\frac{3}{2}(ht)^2\cos ht+3(ht)^2}{(1+\mu ft)^2}$$

$$\left.-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{2}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu ft)^3}\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$+\frac{\mu^2}{\varrho}\left(\frac{f}{h}\right)^2\left[-\frac{23}{36}\log(1+\mu ft)+\frac{1}{4}\cos 2ht-7/18+\frac{\frac{1}{2}-2\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{4/3\cos ht-4/9(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2ht}{(1+\mu ft)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\mu f}{h}\left(ht+\frac{1}{2}ht\cos 2ht\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{3/4(ht)^2}{(1+\mu ft)^2}\ldots\ldots\right]$$

$$-\left(\sin ht.\,\varphi_2+\frac{1}{2}\cos ht.\,\varphi_1^2\right)+\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^4\left[\frac{\mu f}{h}\left(\frac{\frac{1}{4}\sin ht+\frac{7}{4}ht\cos ht}{1+\mu ft}-\frac{\frac{1}{2}\sin 2ht-\frac{1}{4}ht\cos ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{1}{4}\frac{(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^5}\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(2ht\sin ht+\frac{\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{6}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu ft)^4}\left(\frac{\mu f}{h}\right)^4\cdot\frac{\frac{1}{6}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu ft)^5}\ldots\right]$$

$$+\frac{\mu}{\varrho}\frac{f}{h}\left[\frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu ft)\cos ht-\frac{3}{2}\frac{ht\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{\mu f}{h}\left(-\frac{7}{8}\cos ht-\frac{\frac{3}{2}ht\sin ht+\frac{19}{8}\cos ht+\frac{1}{12}(\cos ht)^3-\frac{1}{4}}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cos 2ht}{(1+\mu ft)^4}+\frac{13}{12}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(-\frac{31}{4}\frac{ht\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{2ht\cos ht}{(1+\mu ft)^3}\right)\ldots\ldots\right],$$

u. s. w.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = h + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\cdot\varepsilon + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\cdot\varepsilon^2 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\cdot\varepsilon^3 + \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = -\frac{\mu}{\rho}\frac{f^2}{h}\left[\frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^2} + 2\frac{\mu f}{h}\left(1-\frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^3}\right) - 6\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^4} - 24\frac{(\mu f)^3}{h^2}\int\frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^5}\,\partial t\right],$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = -\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\frac{f^4}{h^3}\left[\frac{1}{4} - \frac{\cos ht}{1+\mu f t} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2ht}{(1+\mu f t)^4} + \frac{\mu f}{h}\left(-\frac{ht\cos ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{3/2\,\sin 2ht}{(1+\mu f t)^5}\right) - \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{2ht\sin ht}{(1+\mu f t)^3}\ldots\right]$$

$$-\frac{\mu}{\rho}f\left[\frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu f t) + \frac{\frac{1}{4}\sin 2ht}{1+\mu f t} - \frac{2\sin ht}{(1+\mu f t)^3} + \frac{\mu f}{h}\left(-\frac{69}{8} + \frac{1+\cos ht+\frac{5}{8}\cos 2ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{6\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\right)\ldots\right],$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t} = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^3\frac{f^6}{h^5}\left[\frac{1}{4}\frac{ht\cos ht+\sin ht}{(1+\mu f t)^2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2ht - ht\cos ht}{(1+\mu f t)^4} - \frac{\frac{1}{4}(\sin ht)^3}{(1+\mu f t)^6} + \frac{\mu f}{h}\left(\frac{2ht\sin ht}{1+\mu f t} + \frac{\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu f t)^3} - \frac{ht\sin 2ht}{(1+\mu f t)^4} + \frac{ht\sin ht}{(1+\mu f t)^5}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{6}(ht)^2\cos ht}{(1+\mu f t)^5} + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{3}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu f t)^6}\ldots\ldots\right]$$

$$+\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\frac{f^3}{h^2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\frac{\cos ht\log(1+\mu f t)}{1+\mu f t} - \frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\frac{ht\cos ht - \sin ht\log(1+\mu f t)}{(1+\mu f t)^2} + 3\log(1+\mu f t) + \frac{1}{2}\cos 2ht + \frac{23}{6} - \frac{23}{8}\frac{\cos ht}{1+\mu f t} - \frac{2\cos ht}{(1+\mu f t)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{3ht\sin ht + 3\cos ht\log(1+\mu f t) + \frac{4}{3}\cos ht + \frac{13}{12}(\cos ht)^3}{(1+\mu f t)^3} + \frac{2+\cos 2ht}{(1+\mu f t)^5} + \frac{\mu f}{h}\left(\frac{\frac{3}{2}ht\cos 2ht}{1+\mu f t} - \frac{23}{4}\frac{ht\cos ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{9ht\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\right)\ldots\right]$$

$$-\frac{\mu}{\rho}h\left[\sin ht + \frac{4}{9}(\sin ht)^3 - \frac{3}{2}\frac{ht}{1+\mu f t} - \frac{\frac{1}{2}\sin 2ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^4}\right.$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{\cos ht + \frac{1}{2}\cos 2ht - \frac{3}{2}ht\sin ht}{1+\mu f t} - \frac{2+2\cos ht+\frac{5}{4}\cos 2ht}{(1+\mu f t)^3} - \frac{2ht\sin ht + 2\cos ht}{(1+\mu f t)^4} - \frac{4\cos ht}{(1+\mu f t)^5} + \frac{39}{4}\right)$$

$$\left. + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{3ht}{1+\mu f t} + \frac{\frac{3}{2}(ht)^2\sin ht + \frac{15}{4}ht\cos ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{8ht\cos ht}{(1+\mu f t)^5}\right) - \left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{2}(ht)^3\sin ht + \frac{9}{4}(ht)^2\cos ht}{(1+\mu f t)^3} + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^4\cdot\frac{\frac{3}{2}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\ldots\right],$$

u. s. w.

$$\theta = ht + \varphi_1\cdot\varepsilon + \varphi_2\cdot\varepsilon^2 + \varphi_3\cdot\varepsilon^3 + \ldots\ldots,$$

$$\varphi_1 = -\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{f}{h}\right)^2\left[1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{\mu f}{h}\left(2ht - \frac{4\sin ht}{(1+\mu f t)^3}\right) - 18\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\right) + 72\frac{(\mu f)^3}{h^2}\int\frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^5}\partial t - 24\frac{(\mu f)^3}{h}\int\partial t\int\frac{\sin ht}{(1+\mu f t)^5}\partial t\right],$$

$$\varphi_2 = -\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^4\left[\frac{1}{4}ht - \frac{\sin ht}{1+\mu f t} + \frac{\frac{1}{2}ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{\frac{1}{8}\sin 2ht}{(1+\mu f t)^4} + \frac{\mu f}{h}\left(1 - \frac{ht\sin ht}{(1+\mu f t)^2} - \frac{\cos 2ht}{(1+\mu f t)^5}\right) + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{23}{4}ht + \frac{1/6\,(ht)^3 + 4ht\cos ht}{(1+\mu f t)^3}\right)\ldots\right]$$

$$-\frac{\mu}{\rho}\frac{f}{h}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2(1+\mu f t)\log(1+\mu f t) - \frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\cdot ht - \frac{7}{8} - \frac{1+\frac{3}{8}\cos 2ht}{1+\mu f t} + \frac{2\cos ht}{(1+\mu f t)^3} + \frac{\mu f}{h}\left(-\frac{69}{8}ht + \frac{\sin ht + \frac{3}{4}\sin 2ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{12\sin ht}{(1+\mu f t)^4}\right)\ldots\right],$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^3\left(\frac{f}{h}\right)^6\left[\frac{\frac{1}{4}ht\sin ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu f t)^4} + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{6}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu f t)^5}\ldots\right]$$

$$+\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^3\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\frac{\sin ht\log(1+\mu f t)}{1+\mu f t} + \frac{h}{\mu f}\left(3(1+\mu f t)\log(1+\mu f t) + \frac{1}{2} - \frac{3\cos ht\log(1+\mu f t) + \frac{3}{2}ht\sin ht}{(1+\mu f t)^2} - \frac{1/2}{(1+\mu f t)^4}\right) + \frac{5}{6}ht + \frac{6ht\cos ht}{(1+\mu f t)^3}\ldots\right]$$

$$-\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\log(1+\mu f t) - \frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\cdot ht - 3\log(1+\mu f t) - \frac{7}{6}\cos ht + \frac{1}{18}(\cos ht)^3 + \frac{71}{72} + \frac{1+\frac{1}{3}\cos 2ht}{(1+\mu f t)^2} - \frac{\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\right.$$

$$\left. + \frac{\mu f}{h}\left(\frac{57}{4}ht + \frac{3/2\,ht\cos ht}{(1+\mu f t)^2} + \frac{2ht\cos ht}{(1+\mu f t)^4}\right)\ldots\ldots\right],$$

u. s. f.

§48.

Die bekannten Coefficienten $T, P_1, P_2 \ldots F_1, F_2 \ldots$ bilden zugleich die Elemente, aus welchen die Ausdrücke für die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ des Mittelpunkts und für die Länge s des von ihm durchlaufenen Weges, ebenfalls als Reihenfunctionen der Zeit t, zusammengesetzt sind. Setzt man

$$\frac{ds}{dt} = R_0 + R_1 \cdot \varepsilon + R_2 \cdot \varepsilon^2 + R_3 \cdot \varepsilon^3 + \ldots,$$

so findet man aus der Gleichung, welche nach §30 $\left(\frac{ds}{dt}\right)^i$ als Reihe ausdrückt, indem man $i=1$ annimmt,

$$R_0 = T = \frac{f}{1+\mu ft},$$

$$R_1 = P_1 = h\left[\cos ht - \frac{1}{(1+\mu ft)^2} - 2\frac{\mu f}{h}\,\frac{\sin ht}{1+\mu ft} + 2\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2 \cdot \frac{1-\cos ht}{(1+\mu ft)^3}\right],$$

$$R_2 = P_2 + \frac{1}{2}\frac{F_1^2}{T} = \mu h\left[\frac{h}{\mu f}\cdot\frac{1}{4}(1+\mu ft)(1-\cos 2ht) - \frac{3}{4}ht - \sin ht + \frac{3}{8}\sin 2ht + \frac{2\sin ht}{(1+\mu ft)^2} - \frac{ht}{(1+\mu ft)^3}\right.$$
$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{\frac{3}{4}(ht)^2 + 2(1-\cos ht) + \frac{3}{4}(\sin ht)^2}{1+\mu ft} - \frac{4(1-\cos ht)}{(1+\mu ft)^3}\right) + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2 \cdot \frac{-\frac{2}{3}(ht)^3 - \frac{21}{8}ht - 2\sin ht + \frac{37}{16}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2} + \left.\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3 \cdot \frac{4(1-\cos ht)^2}{(1+\mu ft)^3}\right]$$
$$+\frac{\mu}{\varrho}h\left(\frac{f}{h}\right)^2\left[\sin ht - \frac{\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2} + 2\frac{\mu f}{h}\left(ht\sin ht - \frac{1-\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right) + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{2ht\cos ht}{1+\mu ft} + \frac{ht}{(1+\mu ft)^3}\right)\cdots\right],$$

$$R_3 = P_3 + \frac{F_1 F_2}{T} - \frac{1}{2}\frac{P_1 F_1^2}{T^2}$$

$$= \mu^2 h\left[-\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\frac{1}{2}(1+\mu ft)^2(\sin ht)^2\cos ht + \left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(\sin ht)^2 + \frac{h}{\mu f}(1+\mu ft)\left(\frac{3}{8}\sin 2ht - \sin ht + \frac{3}{2}(\sin ht)^3\right) + \frac{9}{4}ht\sin ht - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\cos 2ht + \frac{5}{4}\sin(ht)^2\cos ht\right.$$
$$+ \frac{2ht\sin ht - \frac{3}{2}(ht)^2 + 4\cos ht + \frac{5}{3}\cos 2ht - \frac{45}{8}}{(1+\mu ft)^2} + \frac{4(1-\cos ht) - (ht)^2}{(1+\mu ft)^4}$$
$$+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{3/2\,ht\cos ht - \frac{1}{2}ht - \frac{3}{2}(ht)^2\sin ht - \frac{17}{4}\sin ht + \frac{5}{4}\sin 2ht}{1+\mu ft} + \frac{\frac{2}{3}(ht)^3 - 2(ht)^2\sin ht + \frac{21}{8}ht + 4\sin ht - \frac{37}{8}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)$$
$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{\frac{7}{4}(ht)^2 + \frac{1}{2}(ht)^3\sin ht - 3(ht)^2\cos ht + \frac{45}{4}ht\sin ht}{(1+\mu ft)^2} + \frac{2(ht)^2(1-\cos ht)}{(1+\mu ft)^4}\right) - \left.\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{(ht)^3(1-\cos ht)}{(1+\mu ft)^3}\cdots\cdots\right]$$

$$+\frac{\mu}{\varrho}{}^2 h\left(\frac{f}{h}\right)^2\left[-\frac{h}{\mu f}\left(\frac{1}{2}\sin 2ht(1+\mu ft) + \frac{\sin ht(1-2(\cos ht)^2)}{1+\mu ft}\right) - ht\sin 2ht(1+\mu ft) + \cos ht + \frac{1}{4}\cos 2ht - 1 + \frac{\frac{23}{12} + \cos ht - \cos 2ht - \frac{2}{3}(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^2} + \frac{\cos 2ht}{(1+\mu ft)^4}\right.$$
$$+\frac{\mu f}{h}\left(9\sin 2ht(1+\mu ft) - \frac{1}{4}\sin 2ht + ht(2\cos ht - 1 - \frac{1}{2}\cos 2ht) + \frac{2ht - \frac{7}{4}\sin 2ht}{1+\mu ft} - \frac{4ht\cos ht - 3\sin ht}{(1+\mu ft)^2} - \frac{2\sin 2ht + 10\sin ht - 14(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^3}\right.$$
$$\left. - \frac{4ht}{(1+\mu ft)^4} + \frac{3\sin 2ht}{(1+\mu ft)^5}\right)$$
$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(-\frac{2ht\sin ht + 3ht\sin 2ht}{1+\mu ft} + \frac{3ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3} - \frac{(ht)^2}{(1+\mu ft)^4}\right) + \left.\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{(ht)^3}{(1+\mu ft)^3}\cdots\right]$$

$$-\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 h\left(\frac{f}{h}\right)^4\Big[\tfrac{3}{4}\cos ht-\tfrac{1}{4}\,ht\sin ht-\frac{\frac{1}{2}ht\sin ht+2\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\frac{9}{4}(\cos ht)^3-\cos ht}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\Big(\sin ht+2ht\cos ht-\frac{\sin ht+\frac{1}{2}ht\cos ht}{1+\mu ft}-\frac{2\sin 2ht+4ht\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht\cos ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{\frac{17}{3}\sin ht-\frac{27}{4}(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^5}\Big)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\Big(2(ht)^2\cos ht-\tfrac{23}{4}\,ht\sin ht+\frac{\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{\frac{1}{6}(ht)^3\sin ht+4ht\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{ht\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\Big)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{3}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu ft)^4}+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^4\cdot\frac{\frac{1}{3}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu ft)^5}\cdots\Big]$$

$$-\frac{\mu}{\varrho}\,h\,\frac{f}{h}\Big[-\tfrac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2(1+\mu ft)\log(1+\mu ft)\sin ht+\tfrac{3}{2}\,\frac{h}{\mu f}\,ht\sin ht-\tfrac{3}{2}\,\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu ft)\cos ht+\tfrac{3}{8}\sin ht+\frac{3\log(1+\mu ft)\sin ht+3ht\cos ht+\frac{13}{8}\sin ht-\frac{3}{4}(\sin ht)^3}{1+\mu ft}$$

$$-\frac{2\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\Big(\tfrac{69}{8}(ht\sin ht-\cos ht)+\frac{\frac{7}{2}\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{3\log(1+\mu ft)\cos ht-3ht\sin ht+\frac{13}{8}\cos ht+\frac{9}{4}(\cos ht)^3+\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{\cos 2ht-5}{(1+\mu ft)^4}\Big)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\Big(\tfrac{69}{4}\,\frac{ht\cos ht}{1+\mu ft}+\frac{2ht}{(1+\mu ft)^4}\Big)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{(ht)^2}{(1+\mu ft)^4}\cdots\cdots\Big],\qquad \text{u. s. w.}$$

und man hat ferner

$$s=\int R_0\,\partial t+\int R_1\,\partial t.\,\varepsilon+\int R_2\,\partial t.\,\varepsilon^2+\int R_3\,\partial t.\,\varepsilon^3+\cdots\cdots,$$

$$\int R_0\,\partial t=\frac{1}{\mu}\log(1+\mu ft),$$

$$\int R_1\,\partial t=\sin ht-\frac{ht}{1+\mu ft}-2\,\frac{\mu f}{h}\cdot\frac{1-\cos ht}{1+\mu ft},$$

$$\int R_2\,\partial t=\mu\Big[\tfrac{1}{4}\,\frac{h}{\mu f}(1+\mu ft)(ht-\tfrac{1}{2}\sin 2ht)-\tfrac{1}{2}(ht)^2+\cos ht-\tfrac{1}{4}\cos 2ht-\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^2+\frac{2(1-\cos ht)}{(1+\mu ft)^2}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\cdot\frac{\frac{1}{4}(ht)^3+\frac{21}{8}ht-2\sin ht-\frac{5}{16}\sin 2ht}{1+\mu ft}-2\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{1-\cos ht}{1+\mu ft}\right)^2\cdots\Big]$$

$$+\cos ht.\,q+\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{f}{h}\right)^2\Big[\frac{\mu f}{h}\Big(\frac{2\sin ht}{1+\mu ft}-\frac{ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{\frac{1}{2}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}\Big)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{4ht\sin ht}{1+\mu ft}\cdots\cdots\Big],$$

$$\int R_3\,\partial t=\mu^2\Big[\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\Big(\tfrac{1}{4}ht-\tfrac{1}{8}\sin 2ht-\tfrac{1}{6}(1+\mu ft)^2(\sin ht)^3\Big)-\frac{h}{\mu f}\Big((1+\mu ft)\big(\tfrac{5}{6}\cos ht-\tfrac{11}{18}(\cos ht)^3+\tfrac{1}{4}\cos 2ht\big)-\tfrac{17}{36}\Big)-ht-\tfrac{9}{4}\,ht\cos ht+\tfrac{3}{4}\sin 2ht$$

$$+\tfrac{89}{36}\sin ht+\tfrac{67}{108}(\sin ht)^3-\tfrac{39}{8}\,\frac{ht}{1+\mu ft}-\frac{\frac{1}{4}(ht)^3+2ht\cos ht-6\sin ht-\frac{5}{16}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{\frac{1}{3}(ht)^3-4ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{4\sin ht}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\Big(\frac{\frac{1}{2}(ht)^2(1+3\cos ht)+\frac{3}{2}ht\sin ht}{1+\mu ft}+\tfrac{21}{8}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^2+\frac{2(ht)^2(2+\cos ht)-8ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3}$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\Big(-\frac{\frac{1}{2}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu ft)^2}+\tfrac{5}{2}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^3+\frac{4(ht)^2\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\Big)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\tfrac{1}{2}\,\frac{(ht)^4}{(1+\mu ft)^3}\cdots\Big]$$

$$+\frac{\mu^2}{\varrho}\left(\frac{f}{h}\right)^2\Big[\frac{h}{\mu f}\Big(\tfrac{1}{4}\cos 2ht-\tfrac{7}{12}+\frac{\cos ht-\frac{2}{3}(\cos ht)^3}{1+\mu ft}\Big)-ht+3\sin ht-\tfrac{1}{4}\sin 2ht+\tfrac{3}{4}\,ht\cos 2ht+\tfrac{29}{12}\,\frac{ht}{1+\mu ft}-\frac{\frac{7}{3}\sin ht+\frac{1}{2}\sin 2ht-\frac{13}{9}(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin 2ht}{(1+\mu ft)^4}$$

$$+\frac{\mu f}{h}\left((ht)^2(1+\tfrac{1}{2}\cos 2ht)+ht(2\sin ht-\tfrac{3}{4}\sin 2ht)-\frac{4ht\sin ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{2(ht)^2}{(1+\mu ft)^3}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{(ht)^3}{1+\mu ft}+\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^3\right)\ldots\Big]$$

$$+\cos ht.\,Q_2-\tfrac{1}{2}\sin ht.\,Q_1^2-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^4\Big[\frac{\mu f}{h}\left(\frac{1-\frac{1}{2}ht\sin ht+\frac{1}{2}\cos ht}{1+\mu ft}-\frac{\cos 2ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{\cos ht-\frac{1}{2}(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^5}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(4ht\cos ht+\frac{4ht}{(1+\mu ft)^2}-\frac{ht\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3.\frac{\frac{1}{3}(ht)^3\sin ht}{(1+\mu ft)^4}\ldots\Big]$$

$$+\frac{\mu}{\rho}\frac{f}{h}\Big[3\frac{h}{\mu f}\log(1+\mu ft)\sin ht-3\frac{ht\sin ht-\log(1+\mu ft)\cos ht}{1+\mu ft}-\frac{\mu f}{h}\left(\frac{7/4\sin ht}{1+\mu ft}+\frac{\frac{21}{4}\sin ht-\frac{1}{8}(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^2}-\frac{2ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{\sin 2ht}{(1+\mu ft)^4}\right)$$

$$-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{69}{4}\frac{ht\sin ht}{1+\mu ft}-\frac{(ht)^2}{(1+\mu ft)^3}\right)\ldots\ldots\Big],$$

u. s. f.

§ 49.

In den beiden vorigen §§ sind die berechneten Coefficienten T, P_1, F_1, $\int T dt$, $\int P_1 dt$, $\int F_1 dt$ vollständig angegeben; eben so die von ρ unabhängigen ersten Theile der Coefficienten P_2, F_2, R_2, $\int P_2 dt$, $\int F_2 dt$, $\int R_2 dt$. Dagegen sind die weiteren Theile der letzteren sechs Coefficienten, sowie die Theile der Coefficienten P_3, F_3, R_3, und zwar die beiden letzten, die Factoren $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^4$ und $\frac{\mu}{\rho}\frac{f}{h}$ enthaltenden Theile der Coefficienten $\int P_3 dt$, $\int F_3 dt$, $\int R_3 dt$ nur bis zu den Gliedern der Ordnung $\frac{1}{h}$, und zwar die beiden ersten, die Factoren μ^2 und $\frac{\mu^2}{\rho}\left(\frac{f}{h}\right)^2$ enthaltenden, Theile der Coefficienten $\int P_3 dt$, $\int F_3 dt$, $\int R_3 dt$ nur bis zu den Gliedern der Ordnung h^0, innerhalb der Klammern [], genau angemerkt, und die Glieder der niedrigeren Ordnungen von h bei den oben genannten Theilen innerhalb dieser Klammern weggelassen.

In den Reihen für $\frac{d\theta}{dt}$ und θ (§ 47) sind die Coefficienten $\frac{dQ_1}{dt}$ und Q_1 vollständig angegeben. Die Coefficienten $\frac{dQ_2}{dt}$ und Q_2, und der, den Factor $\frac{\mu}{\rho}h$ enthaltende, dritte Theil von $\frac{dQ_3}{dt}$, sind dagegen nur bis zu den Gliedern der Ordnung $\frac{1}{h}$, die mit den Factoren $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^3\frac{f^6}{h^5}$ und $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2.\frac{f^3}{h^2}$ behafteten beiden ersten Theile von $\frac{dQ_3}{dt}$, so wie der den Factor $\frac{\mu}{\rho}$ enthaltende dritte Theil von Q_3, nur bis zu den Gliedern der Ordnung h^0, und endlich die beiden ersten, mit den Factoren $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^3\left(\frac{f}{h}\right)^6$ und $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^3$ behafteten, Theile des Coefficienten Q_3 nur bis zu den Gliedern der Ordnung h einschließlich, innerhalb der Klammern [] genau angegeben.

Man bemerke, daß wenn die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung des Geschosses als beständig oder gleich k angenommen wird, die von ρ

abhängigen Theile der Coefficienten P_2, F_2, R_2, $\int P_2 dt$, $\int F_2 dt$, $\int R_2 dt$, P_3, F_3 etc. wegfallen, und nur der von ς unabhängige erste Theil eines jeden dieser Coefficienten übrig bleibt, welche ersten Theile mit den Coefficienten P_1, F_1, $\int P_1 dt$, $\int F_1 dt$ demnach bei unveränderlicher Umdrehungsgeschwindigkeit die Coefficienten der die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ und die Coordinaten x, z, so wie die Bogenlänge s, ausdrückenden Reihen bilden würden, und daß somit diese Reihen als aus zwei wesentlich verschiedenen Haupttheilen, von denen der eine auf den beständigen Theil (Anfangswerth) k der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ sich bezieht, der andere dem veränderlichen Theil dieser Geschwindigkeit angehört, bestehend sich betrachten lassen. Es ist aber P_1 durch k^3, F_1 durch k^2 theilbar (*); daher muß auch $\int P_1 dt$ durch k^3, $\int F_1 dt$ durch k^2, und müssen vermöge der Gleichungen (L), (M) des §44 jene ersten Theile von P_2, $\int P_2 dt$ durch k^4, von F_2, $\int F_2 dt$ durch k^5, u. s. w. theilbar seyn, woraus folgt, daß die Veränderung der fortschreitenden Bewegung des Geschosses, welche durch eine beständige Umdrehungsgeschwindigkeit entstehen würde, wie von selbst einleuchtet, mit dieser Umdrehungsgeschwindigkeit zugleich kleiner wird und verschwindet. Daß aber auch die in Wirklichkeit durch die Umdrehung erfolgende Veränderung jener Bewegung bei kleineren Werthen der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit k kleiner ausfällt als bei größeren, wie dieses nicht anders sich erwarten läßt, ist indessen aus den Formeln weniger leicht unmittelbar zu ersehen (§56).

§50.

Die für $\frac{dx}{dt}$, x $\frac{d\theta}{dt}$, θ (§47, 48) entwickelten Reihen können, wie von Anfange erhellet, nur für kleinere Werthe von t brauchbar seyn. Diese Werthe dürfen nämlich nicht größer genommen werden, als daß durch sie schon die ersten Glieder der Reihe für θ klein genug sich ergeben, um die Reihen für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ (§44) ebenfalls schon von ihren ersten Gliedern an gehörig zusammenlaufend zu machen; indem, wenn dieses nicht der Fall wäre, auch die nächstfolgenden Glieder der Reihen

(*) Man vergleiche die Anmerkung zu §31.

für $\frac{d\theta}{dt}$ und θ, so wie die späteren Glieder der dem veränderlichen Theile der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ angehörigen Haupttheile der Reihen für $\frac{dx}{dt}$, x, $\frac{dz}{dt}$, z, $\frac{d\zeta}{dt}$, ζ, in welchen Gliedern jene ersten Glieder der Reihe für θ, wie die Gleichungen (L), (M), (N) zeigen, aber wegen $\sin\theta$ und $\cos\theta$, in höheren Potenzen auftreten, dadurch zu groß gegen die ihnen vorausgehenden ersten Glieder ausfallen müßten, als daß eine Convergenz der genannten Reihen, wie sie die Brauchbarkeit derselben fordert, überhaupt denkbar wäre.

Um einigermaßen zu übersehen, wie groß ungefähr f genommen werden darf, wenn die Reihen, so weit sie entwickelt sind, noch verwendbar seyn sollen, nehme man beispielsweise in runden Zahlen mit Bezug auf § 41

$$\varepsilon = \frac{1}{50}, \quad \mu = \frac{1}{4800}, \quad \varrho = \frac{1}{25}, \quad k = 400, \quad f = 800, \quad \text{und } t = 1$$

an, so daß

$$kt = 400, \quad \mu f = \frac{1}{6}, \quad \frac{\mu f}{k} = \frac{1}{2400}, \quad 1+\mu f t = \frac{7}{6}, \quad \log(1+\mu f t) = 0{,}1541505,$$

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{1}{192}, \quad \frac{\mu}{\varrho}\frac{f}{k} = \frac{1}{96}, \quad \varepsilon\frac{\mu}{\varrho}\frac{f}{k} = \frac{1}{4800}$$

wird. Dadurch erhält man für die Glieder der Reihenfunctionen $\frac{d\theta'}{dt}$ und θ', indem man diejenigen Theile dieser Glieder, welche, als von $\sin kt$, $\cos kt$, $\sin 2kt$, $\cos 2kt$ abhängig, ihr Zeichen während der Umdrehung des Geschosses ändern, außer Acht läßt, somit (wegen $(\sin kt)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos 2kt)$, $(\cos kt)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2kt)$) $(\sin kt)^2 = (\cos kt)^2 = \frac{1}{2}$ annimmt, und übrigens Zahlen, welche kleiner als 0,000001 sind, als werthlos vernachlässigt, folgende numerische, in der Bedeutung abstracter Zahlen zu nehmende, Werthe:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial t}\cdot\varepsilon = -\frac{800}{50\cdot 96}\left[\frac{2}{2400}\right] = -0{,}000139,$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial t}\cdot\varepsilon^2 = -\frac{2\cdot 800}{50^2\cdot 96^2}\left[0{,}25+\frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^4\right] - \frac{800}{50^2\cdot 192}\left[3600\cdot 0{,}1541505 + \frac{1}{2400}\left(-\frac{69}{8}+\left(\frac{6}{7}\right)^2\right)\right] = -0{,}000036 - 0{,}924898 = -0{,}924934,$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial t}\cdot\varepsilon^3 = -\frac{4\cdot 800}{50^3\cdot 96^3}\left[\cdots\right] - \frac{800}{50^3\cdot 96^2}\left[-3\cdot 0{,}1541505 - 2\left(\frac{6}{7}\right)^5 - \frac{23}{6}\right] - \frac{400}{50^3\cdot 192}\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot 400\right] = +0{,}000004 + 0{,}008571 = 0{,}008575;$$

$$Q_1\cdot\varepsilon = -\frac{2}{50.96}\left[1+\tfrac{1}{3}\right] = -0{,}000556,$$

$$Q_2\cdot\varepsilon^2 = -\frac{4}{50^2.96^2}\left[100+200\left(\tfrac{6}{7}\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{50^2.96}\left[2400\left(3600\cdot\tfrac{7}{6}\cdot 0{,}1541505-\tfrac{3}{2}400\right)-\tfrac{7}{8}-\tfrac{6}{7}-\tfrac{69}{48}\right] = -0{,}000043-0{,}474306 = -0{,}474349,$$

$$Q_3\cdot\varepsilon^3 = +\frac{8}{50^3 96^3}\left[\ldots\right]-\frac{2}{50^3.96^2}\left[2400\left(-3\cdot\tfrac{7}{6}\cdot 0{,}1541505+\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{6}{7}\right)^4-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{6}\cdot 2000\right]$$

$$-\frac{1}{50^3.192}\left[3600\left(2400\cdot 0{,}1541505-400\right)\right] \qquad = +0{,}000004+0{,}004506 = +0{,}004510.$$

Werden nach der Gleichung (N) 4) noch weiter $\frac{\partial Q_4}{\partial t}$ und Q_4 entwickelt, so ergibt sich

$$\frac{\partial Q_4}{\partial t} = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^4\frac{f^8}{h^7}\left[\ldots\right]+\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^3\frac{f^5}{h^4}\left[\ldots\right]$$

$$+\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2\frac{f^2}{h}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\log(1+\mu ft)\cos 2ht-\frac{3}{4}\frac{h}{\mu f}\frac{ht\cos 2ht}{1+\mu ft}-\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\frac{\log(1+\mu ft)\cos ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\frac{ht\cos ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{\frac{3}{2}(ht)^2\cos ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{9}{8}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\left(\log(1+\mu ft)\right)^2\ldots\right]$$

$$+\frac{\mu}{\varrho}\frac{h^2}{f}\left[-(1+\mu ft)\left(\frac{3}{16}ht-\frac{1}{8}\sin 2ht+\frac{1}{64}\sin 4ht\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{9}{32}(ht)^2+\frac{3/8(ht)^2+\frac{3}{16}ht\sin 2ht}{1+\mu ft}+\frac{3}{4}\left(\frac{ht}{1+\mu ft}\right)^2+\frac{1/4\,ht\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}-\frac{\frac{1}{2}ht\sin ht}{(1+\mu ft)^4}-\frac{4ht\sin ht}{(1+\mu ft)^5}\right)+\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\frac{\frac{1}{16}(ht)^3\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}\ldots\right]$$

$$Q_4 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^4\left(\frac{f}{h}\right)^8\left[\ldots\right]+\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^3\left(\frac{f}{h}\right)^5\left[\ldots\right]$$

$$+\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^2\left[9/8\left(\frac{h}{\mu f}\right)^3(1+\mu ft)\left(\left(\log(1+\mu ft)\right)^2-2\log(1+\mu ft)+2\right)-\frac{9}{4}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^3+\frac{3}{8}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\log(1+\mu ft)\sin 2ht-\frac{3}{8}\frac{h}{\mu f}\frac{ht\sin 2ht}{1+\mu ft}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\frac{\log(1+\mu ft)\sin ht}{(1+\mu ft)^2}+\frac{3}{2}\frac{h}{\mu f}\frac{ht\sin ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{3}{2}\frac{(ht)^2\sin ht}{(1+\mu ft)^3}\ldots\ldots\right]$$

$$+\frac{\mu}{\varrho}\frac{h}{f}\left[-(1+\mu ft)\left(\frac{3}{32}(ht)^2+\frac{1}{16}\cos 2ht-\frac{1}{256}\cos 4ht-\frac{15}{256}\right)-\frac{9}{8}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2\log(1+\mu ft)+\frac{9}{8}\frac{h}{\mu f}\frac{ht}{1+\mu ft}+\frac{3}{16}(ht)^2+\frac{3}{8}\frac{(ht)^2}{1+\mu ft}\right.$$

$$-\frac{2151}{128}\log(1+\mu ft)-\frac{1755}{128}(1+\mu ft)\log(1+\mu ft)-1+\frac{1}{(1+\mu ft)^3}$$

$$\left.+\frac{\mu f}{h}\left(\frac{1}{8}(ht)^3+\frac{1087}{32}ht+\frac{15}{4}\frac{ht}{1+\mu ft}-\frac{3}{32}\frac{ht\cos 2ht}{1+\mu ft}-\frac{1}{8}\frac{ht\cos 2ht}{(1+\mu ft)^3}+\frac{1}{2}\frac{ht\cos ht}{(1+\mu ft)^4}+\frac{4ht\cos ht}{(1+\mu ft)^5}\right)-\left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{32}(ht)^3\cos ht}{(1+\mu ft)^2}\ldots\right].$$

Von den beiden ersten Theilen der Coefficienten $\frac{\partial Q_4}{\partial t}$ und Q_4 sind die Glieder innerhalb der Klammern [] weggelassen, weil sie im ersten Theile von Q_4 höchstens bis zur Ordnung h, im zweiten Theile von Q_4 höchstens bis zur Ordnung h^2 steigen

können; die dritten Theile von $\frac{\partial Q_4}{\partial t}$ und Q_4 sind bis zu den Gliedern der Ordnung k^2, die vierten Theile bis zu den Gliedern der Ordnung k einschließlich innerhalb der Klammern [] genau angegeben. Indem man diese Coefficienten, so wie die vorhergehenden, numerisch berechnet, findet sich

$$\frac{\partial Q_4}{\partial t}\cdot\varepsilon^4 = \frac{400}{50^4\cdot 96^2}\left[9/8\,(2400\cdot 0,1541505)^2\right]$$
$$+\frac{400}{50^4\cdot 2\cdot 192}\left[-\frac{7}{6}\cdot\frac{1200}{16}+\frac{1}{2400}\left(\frac{9}{32}400^2+\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{8}400^2+\frac{3}{4}\left(\frac{6}{7}\right)^2 400^2\right)\right] = 0,001069 - 0,000002 = 0,001067,$$

$$Q_4\cdot\varepsilon^4 = \frac{1}{50^4\cdot 96^2}\left[9/8\cdot 2400^3\cdot\frac{7}{6}\left(2(1-0,1541505)+(0,1541505)^2\right)-\frac{9}{4}\cdot 2400^3\right]$$
$$+\frac{1}{50^4\cdot 2\cdot 192}\left[-\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{32}\cdot 400^2 - 9/8\cdot 2400\left(2400\cdot 0,1541505-\frac{6}{7}\cdot 400\right)+\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot 400^2+\frac{3}{16}\cdot 400^2+\frac{1}{2400}\cdot\frac{1}{8}\cdot 400^3\right]$$
$$= 0,003703 - 0,000002 = 0,003701\,.$$

Man hat demnach nach Verfluß der ersten Secunde

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t} = -0,000139 - 0,924934 + 0,008575 + 0,001067 = -0,91543,$$
$$\theta' = -0,000556 - 0,474349 + 0,004510 + 0,003701 = -0,46669\,;$$

und es beträgt, abgesehen von den Gliedern, welche während jeder Umdrehung ihr Zeichen wechseln, indem man nur diejenigen Veränderungen beachtet, welche fortdauernd in derselben Richtung Statt finden, die Abnahme der Winkelgeschwindigkeit, welche Anfangs 400 war, in der ersten Secunde etwas mehr als 9/10, und die Verminderung des Winkels θt nicht ganz 1/2, so daß statt $\frac{400}{2\pi}$ Umläufe, welche das Geschoß bei beständiger Umdrehungsgeschwindigkeit in der ersten Secunde gemacht hätte, es in Wirklichkeit deren nur $\frac{399,5333}{2\pi}$ gemacht hat, oder um nahe $\frac{1}{13,5}$ Umdrehung $= 26\frac{2}{3}$ Grade zurückgeblieben ist.

Werden die Glieder der Reihen, welche die Coordinaten des Mittelpunkts ausdrücken, derselben numerischen Berechnung unterworfen, so ergibt sich in Fußen

$$\int T\partial t = 4800\cdot 0,1541505 = 739,9224,$$
$$\int P_1\partial t\cdot\varepsilon = \frac{1}{50}\left[-\frac{6}{7}\cdot 400 - \frac{2}{2400}\cdot\frac{6}{7}\right] = -6,857157,$$
$$\int P_2\partial t\cdot\varepsilon^2 = -\frac{1}{50^2\cdot 4800}\left[\frac{3}{8}\cdot 400^2+\frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^2\cdot 400^2-\frac{1}{2400}\,\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{4}\,400^3\right]$$
$$+\frac{1}{50^2\cdot 48}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^2-\frac{1}{50^2\cdot 48}\cdot\frac{400}{2400}\left(\frac{6}{7}\right)^2 \qquad = -0,009422 + 0,000002 = -0,009420,$$

$$\int \mathfrak{P}_3 \partial t.\,\varepsilon^3 = \frac{1}{50^3.4800^2}\left[-\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{6}{7}\right)^2.\,400^3 - \left(\tfrac{6}{7}\right)^3\tfrac{1}{3}\,400^3\right]$$

$$+\frac{4}{50^3.192.4800}\left[\cdots\right] - \frac{1}{50^3.96}\left[\cdots\right] \qquad = -0{,}000009;$$

$$\int \mathfrak{F}_1 \partial t.\,\varepsilon = -\frac{1}{50}\left[-1+0{,}1541505\right] = -0{,}016917,$$

$$\int \mathfrak{F}_2 \partial t.\,\varepsilon^2 = -\frac{1}{50^2.4800}\left[200 - 1800.\,0{,}15415 + \tfrac{6}{7}.\,400\right]$$

$$-\frac{1}{50^2.48}\left[\cdots\right] \qquad = -0{,}000022,$$

$$\int \mathfrak{F}_3 \partial t.\,\varepsilon^3 = \frac{1}{50^3.4800^2}\left[\cdots\right] + \frac{4}{50^3.4800.192}\left[\cdots\right] + \frac{1}{50^3.48^2}\left[\cdots\right] = 0;$$

wonach am Ende der ersten Secunde der Werth von

$$x = 739{,}9224 - 6{,}857157 - 0{,}009420 - 0{,}000009 = 733{,}0558 \text{ Fuß}$$

$$z = -0{,}016917 - 0{,}000022 = -0{,}016939 \text{ Fuß}$$

ist.

Vermöge dieser Ergebnisse ist anzunehmen, daß bei Anwendung der obigen Zahlenwerthe für die in die Rechnung eingehenden beständigen Größen die Reihen für $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ und θ, wenn man nur diejenigen Theile ihrer Glieder in Betracht zieht, welche, unabhängig von $\sin kt$, $\cos kt$, $\sin 2kt$, $\cos 2kt$, immer in derselben Richtung wachsen oder abnehmen, für Werthe von t, welche der Einheit nahe kommen, noch brauchbar seyn werden, daß dagegen, wenn zugleich die Veränderungen berücksichtigt werden sollen, welche während jeder Umdrehung des Geschosses abwechselnd positiv und negativ werden, der Werth von t nicht einmal die Einheit wird erreichen dürfen, wenn jene Reihen noch gehörig convergiren sollen.

Was die Reihen für x, z und s betrifft, so werden zwar die auf den beständigen Theil k der Winkelgeschwindigkeit Bezug habenden Haupttheile derselben (§ 49), wie schon aus den Betrachtungen des § 42 folgt, auch für größere Werthe von t Anwendung finden, die dem veränderlichen Theile $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ dieser Geschwindigkeit angehörigen Haupttheile derselben aber, obgleich die Glieder dieser Theile im vorigen Zahlenbeispiel nur sehr klein ausgefallen sind, dennoch im Allgemeinen nur für Werthe von t, welche die Einheit nicht beträchtlich übersteigen, gehörig zusammenlaufen. Ähnlich wird es sich mit den Reihen für $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial s}{\partial t}$ verhalten.

Wollte man die Berechnung der Bahn auf einen größern Zeittheil ausdehnen, so hätte man dieselbe nach der unabhängigen Veränderlichen t in eine verhältnißmäßige Anzahl Abschnitte zu theilen, und die Elemente der Bahn für jeden einzelnen Abschnitt zu berechnen, so daß die Endwerthe der Elemente des einen Abschnitts die Anfangswerthe der Elemente des nächstfolgenden bilden würden.

§51.

Aus der dritten Gleichung (K) (§44) folgt, daß die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ der Umdrehung des Geschosses einen größten oder kleinsten Werth erhält, so oft der Factor $\frac{dx}{dt}\cos\theta - \frac{dz}{dt}\sin\theta$ gleich Null wird, d. i. so oft der Schwerpunkt oder die Centrallinie des Geschosses bei dessen Umdrehung in die Berührende der Bahn des Mittelpunkts fällt (§24), und zwar erhellet, daß das Maximum Statt findet, wenn der Schwerpunkt in dieser Berührenden sich vor dem Mittelpunkt, und das Minimum, wenn jener Punkt sich hinter diesem befindet.

Nach §44 findet man aber

$$\frac{dx}{dt}\cos\theta - \frac{dz}{dt}\sin\theta = T\cos ht + (P_1\cos ht - F_1\sin ht - T\sin ht.\varphi_1)\varepsilon + (P_2\cos ht - F_2\sin ht - (P_1\sin ht + F_1\cos ht)\varphi_1 - T(\sin ht.\varphi_2 + \tfrac{1}{2}\cos ht.\varphi_1^2))\varepsilon^2 \ldots,$$

und indem man in dieser Reihe für T, P_1, F_1, φ_1 die oben (§47) entwickelten Ausdrücke setzt, erhält man zur Bestimmung der Werthe von t, für welche $\frac{d\theta}{dt}$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird, die Gleichung:

$$0 = \cos ht + \varepsilon\frac{h}{\rho}\left[1+\mu ft - \frac{\cos ht}{1+\mu ft} - \frac{\mu f}{h}(\sin ht + \tfrac{1}{2}\sin 2ht)\ldots\right] + \varepsilon\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{f}{h}\right)^2\left[\sin ht(1+2\mu ft) - \frac{\frac{1}{2}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2} - 4\frac{\mu f}{h}\frac{(\sin ht)^2}{(1+\mu ft)^3}\ldots\right]$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2\left(\frac{f}{h}\right)^4\left[\tfrac{1}{4}ht\sin ht - \tfrac{1}{2}\cos ht + \frac{\frac{1}{2}ht\sin ht + \cos 2ht}{(1+\mu ft)^3} + \frac{\frac{1}{4}\cos ht - \frac{3}{4}(\cos ht)^3}{(1+\mu ft)^4} + \frac{\mu f}{h}\left(-2ht\cos ht(4\mu ft) + \sin ht + \frac{2ht\cos 2ht + 2\sin 2ht}{(1+\mu ft)^2} - \frac{5\sin ht - 6(\sin ht)^3}{(1+\mu ft)^5}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\left(\frac{23}{4}ht\sin ht + \frac{1/6(ht)^3\sin ht + 4ht.\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right)\ldots\ldots\right]$$

$$+\varepsilon^2\frac{\mu}{\rho}\frac{f}{h}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f}\right)^2(1+\mu ft)\log(1+\mu ft)\sin ht - 3/2\frac{h}{\mu f}ht\sin ht - \frac{23}{8}\sin ht - \frac{9/8\sin ht - \frac{1}{4}(\sin ht)^3}{1+\mu ft} + \frac{\frac{3}{2}\sin 2ht}{(1+\mu ft)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{\mu f}{h}\left(\frac{69}{8}ht\sin ht + (1+\mu ft)(2-\cos ht - \cos 2ht) - \frac{\cos ht}{1+\mu ft} + \frac{\cos 2ht - \frac{5}{2}\cos ht(\sin ht)^2}{(1+\mu ft)^2} - \frac{16(\sin ht)^2}{(1+\mu ft)^4}\right) + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2 ht(\cos ht + \cos 2ht)\ldots\right]$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{h}{\rho}\right)^2\left[\frac{\mu f}{h}\left(\frac{3}{4}ht\cos ht + (1+\mu ft)\tfrac{1}{4}\sin ht(1+(\sin ht)^2) - \frac{\sin ht + \frac{1}{2}\sin 2ht}{1+\mu ft} + \frac{ht\cos ht}{(1+\mu ft)^2}\right) - \left(\frac{\mu f}{h}\right)^2\cdot\frac{3}{4}ht\sin ht + \left(\frac{\mu f}{h}\right)^3\cdot\frac{\frac{1}{4}(ht)^3\cos ht}{1+\mu ft}\ldots\right]$$

$$\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

Zunächst erhellet aus dieser Gleichung, daß die Werthe von kt, welche dem Maximum oder Minimum der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ entsprechen, bei den ersten Umläufen des Geschosses nicht viel von $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ … verschieden seyn werden, und daß diese Verschiedenheit um so kleiner seyn wird, je kleiner ε ist. Gibt man den beständigen Größen der Gleichung die Zahlenwerthe des § 50, und setzt z. B. $kt = \frac{1}{2}\pi + \delta$, so kann man, da δ klein ist, $\cos kt = -\delta$, $\sin kt = 1$, $\sin 2kt = -2\delta$, $\cos 2kt = -1$ annehmen, und findet, indem man, was ganz unbedeutend ist, bei der Berechnung außer Acht läßt, aus der Gleichung (n) ziemlich einfach $\delta = 0,01051$, oder

$$kt = \frac{1}{2}\pi + 0,01051,$$

und für diesen Werth von kt nach § 47

das Minimum der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ bei der ersten Umdrehung $= k - 0,16723$, so wie den dazu gehörigen Winkel $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0,01012$ oder in Graden $= 90^\circ\, 34',79$.

Eben so erhält man, wenn man $kt = \frac{3}{2}\pi - \delta$, und hiernach $\cos kt = -\delta$, $\sin kt = -1$, $\cos 2kt = -1$, $\sin 2kt = 2\delta$ setzt, aus der Gleichung (n)

$$kt = \frac{3}{2}\pi - 0,00971,$$

und für diesen Werth von kt nach § 47

das Maximum der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ bei der ersten Umdrehung $= k + 0,15093$, und den dazu gehörigen Winkel $\theta = \frac{3}{2}\pi - 0,01013$ oder in Graden $= 269^\circ\, 25',2$.

Der Unterschied zwischen der größten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit beim ersten Umlaufe beträgt daher, so weit angenähert, als ihn die berechneten Formeln geben, nur 0,3186, d. i. nahe den 1251ten Theil des Anfangswerthes dieser Geschwindigkeit, und die Berührende der Bahn des Mittelpunktes macht an den beiden Punkten der Bahn, wo diese größten und kleinsten Werthe Statt finden, mit der Coordinaten-Achse Ox oder mit der Richtungslinie der anfänglichen Bewegung des Mittelpunktes (§ 26) einen Winkel von nahe 35 Minuten.

Der Winkel θ ist gegen kt, d. i. gegen die Größe, welche er bei beständiger Umdrehungsgeschwindigkeit erreicht hätte, vom Anfange der Bewegung bis zum Augenblicke des ersten Minimums dieser Geschwindigkeit um

0, 00039 = 1 Min. 20 Sec. und vom Anfange der Bewegung bis zum Augenblicke des ersten Maximums um 0, 00042 = 1 Min. 27 Sec. zurückgeblieben.

§ 52.

Die im Vorigen abgeleiteten Ausdrücke für $\frac{\partial x}{\partial t}$, x $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, θ enthalten den Anfangswerth f der Geschwindigkeit des Mittelpunkts, welcher Werth nicht für sich unmittelbar gegeben, sondern aus dem Anfangswerthe f° der Geschwindigkeit des Schwerpunkts und der anfänglichen linearen Geschwindigkeit εh der Umdrehung des Mittelpunkts um den Schwerpunkt zusammengesetzt ist (§ 26). Will man daher die Reihen streng nach den Potenzen von ε ordnen, so hat man die Geschwindigkeit f° statt jener f in dieselben einzuführen, wodurch zugleich die Ausdrücke etwas vereinfacht werden.

Wird zu diesem Ende z. B. in den ersten Coefficienten der Reihe für $\frac{\partial x}{\partial t}$ die Grösse $f^{\circ} + \varepsilon h$ statt f gesetzt, und nach Taylors Satz entwickelt (§ 42), so erhält man

$$\mathfrak{F} = \frac{f^{\circ}}{1+\mu f^{\circ} t} + \varepsilon h \frac{1}{(1+\mu f^{\circ} t)^2} - (\varepsilon h)^2 \cdot \frac{\mu t}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} \cdots\cdots$$

$$\mathfrak{P}_1 \cdot \varepsilon = \varepsilon h \left[\cos ht - 2\frac{\sin ht}{h} \cdot \frac{\mu f^{\circ}}{1+\mu f^{\circ} t} - \frac{1 - 2\left(\frac{\mu f^{\circ}}{h}\right)^2 (1-\cos ht)}{(1+\mu f^{\circ} t)^2} \right] + (\varepsilon h)^2 \left[\frac{2\mu t}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} - 2\frac{\sin ht}{h} \cdot \frac{\mu}{(1+\mu f^{\circ} t)^2} + \frac{4\left(\frac{\mu}{h}\right)^2 f^{\circ}(1-\cos ht)}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} \right] \cdots$$

$$\mathfrak{P}_2 \cdot \varepsilon^2 = -\varepsilon^2 \mu h \Big[\tfrac{3}{4} ht + \tfrac{1}{8} \sin 2ht - \frac{2\sin ht}{(1+\mu f^{\circ} t)^2} + \frac{ht}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} + \frac{\mu f^{\circ}}{h}\left(\frac{-\frac{3}{4}(ht)^2 - 1 + \cos ht - \frac{7}{4}(\sin ht)^2}{1+\mu f^{\circ} t} + \frac{4(1-\cos ht)}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} \right)$$

$$+ \left(\frac{\mu f^{\circ}}{h}\right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}(ht)^3 + \frac{21}{8} ht + 2\sin ht - \frac{37}{10} \sin 2ht}{(1+\mu f^{\circ} t)^2} - \left(\frac{\mu f^{\circ}}{h}\right)^3 \cdot \frac{4(1-\cos ht)^2}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} \Big]$$

$$+ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial(\cos ht \cdot \mathfrak{P}_1)}{\partial t} - \frac{2\mu f^{\circ}}{1+\mu f^{\circ} t} \cos ht \cdot \mathfrak{P}_1 + 2\left(\frac{\mu f^{\circ}}{1+\mu f^{\circ} t}\right)^2 \int \cos ht \cdot \mathfrak{P}_1 \partial t \right]$$

u. s. w.

und, indem man nach ε ordnet,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{f^{\circ}}{1+\mu f^{\circ} t} + \varepsilon h \left[\frac{\partial \sin ht}{h \partial t} - 2\frac{\mu f^{\circ}}{h} \cdot \frac{\sin ht}{1+\mu f^{\circ} t} + 2\left(\frac{\mu f^{\circ}}{h}\right)^2 \cdot \frac{1-\cos ht}{(1+\mu f^{\circ} t)^2} \right]$$

$$- \varepsilon^2 \mu h \left[\tfrac{3}{4} ht + \tfrac{1}{8} \sin 2ht + \frac{\mu f^{\circ}}{h} \cdot \frac{-\frac{3}{4}(ht)^2 - 1 + \cos ht - \frac{7}{4}(\sin ht)^2}{1+\mu f^{\circ} t} + \left(\frac{\mu f^{\circ}}{h}\right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}(ht)^3 + \frac{21}{8} ht + 2\sin ht - \frac{37}{16} \sin 2ht}{(1+\mu f^{\circ} t)^2} - \left(\frac{\mu f^{\circ}}{h}\right)^3 \cdot \frac{4(1-\cos ht)^2}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} \right]$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial(\cos ht \cdot \mathfrak{P}_1)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{f^{\circ 2}}{h} \left[\frac{\mu f^{\circ}}{h} \left(\frac{2\cos ht}{1+\mu f^{\circ} t} - \frac{1+\cos 2ht}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} \right) + \left(\frac{\mu f^{\circ}}{h}\right)^2 \left(\frac{ht \cos ht}{1+\mu f^{\circ} t} + \frac{ht}{(1+\mu f^{\circ} t)^3} \right) \cdots \right] \cdots\cdots$$

Auf gleiche Weise findet man

$$x = \frac{1}{\mu}\log(1+\mu f^0 t) + \varepsilon\left[\sin ht - \frac{\mu f^0}{h}\cdot\frac{2(1-\cos ht)}{1+\mu f^0 t}\right]$$

$$-\varepsilon^2\mu\left[\frac{3}{8}(ht)^2 + \frac{1}{8}(\sin ht)^2 + \frac{3}{4}\log(1+\mu f^0 t) + \frac{\mu f^0}{h}\cdot\frac{-\frac{1}{4}(ht)^3 - \frac{21}{8}ht + \sin ht + \frac{7}{16}\sin 2ht}{1+\mu f^0 t} + \left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\cdot\frac{2(1-\cos ht)^2}{(1+\mu f^0 t)^2} - \left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\int\frac{\sin ht - \frac{1}{8}\sin 2ht}{(1+\mu f^0 t)^2}\partial t\right]$$

$$+\varepsilon^2\cos ht . Q_1 - \varepsilon^2\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{f^0}{h}\right)^2\left[\frac{\mu f^0}{h}\left(\frac{ht}{(1+\mu f^0 t)^2} - \frac{2\sin ht}{1+\mu f^0 t} + \frac{\frac{1}{2}\sin 2ht}{(1+\mu f^0 t)^3}\right) - \left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\cdot\frac{4ht\sin ht}{1+\mu f^0 t}\cdots\right]\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon h\left[\frac{\partial\cos ht}{h\partial t} + \frac{\mu f^0}{h}\,\frac{1-\cos ht}{1+\mu f^0 t}\right] + \varepsilon^2\mu h\left[\frac{1}{2}(\sin ht)^2 - \frac{\mu f^0}{h}\cdot\frac{3/4\,ht + \sin ht - \frac{7}{8}\sin 2ht}{1+\mu f^0 t} + 2\left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\cdot\left(\frac{1-\cos ht}{1+\mu f^0 t}\right)^2\right]$$

$$-\varepsilon^2\cdot\frac{\partial(\sin ht . Q_1)}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\mu}{\varrho}\,\frac{f^{0\,2}}{h}\left[\frac{\mu f^0}{h}\left(\frac{\sin ht}{1+\mu f^0 t} - \frac{\frac{1}{2}\sin 2ht}{(1+\mu f^0 t)^3}\right) + \left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\cdot\frac{2ht\sin ht}{1+\mu f^0 t}\cdots\cdots\right]\cdots,$$

$$z = \varepsilon\left[\log(1+\mu f^0 t) - 1 + \cos ht - \mu f^0\int\frac{\cos ht}{1+\mu f^0 t}\partial t\right]$$

$$-\varepsilon^2\mu\left[\frac{1}{2}ht + \frac{1}{8}\sin 2ht - \frac{3}{4}\frac{h}{\mu f^0}\log(1+\mu f^0 t) + \frac{\mu f^0}{h}\cdot\frac{1/8 - \cos ht + \frac{7}{8}(\cos ht)^2}{1+\mu f^0 t} - \left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\cdot\frac{\frac{29}{8}ht}{1+\mu f^0 t} + \frac{(\mu f^0)^2}{h}\int\frac{3\cos ht - 9/16\cos 2ht}{(1+\mu f^0 t)^2}\partial t\right]$$

$$-\varepsilon^2\sin ht . Q_1 - \varepsilon^2\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{f^0}{h}\right)^2\left[\frac{\mu f^0}{h}\left(\frac{1}{12} - \frac{\cos ht}{1+\mu f^0 t} + \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cos 2ht}{(1+\mu f^0 t)^3} - \left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\cdot\frac{2ht\cos ht}{1+\mu f^0 t}\cdots\cdots\right]\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = h - \varepsilon\frac{\mu}{\varrho}\,\frac{f^{0\,2}}{h}\left[\frac{\sin ht}{(1+\mu f^0 t)^2} + 2\frac{\mu f^0}{h}\left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f^0 t)^3}\right) - 6\left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\frac{\sin ht}{(1+\mu f^0 t)^4}\cdots\right]$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2\frac{f^{0\,4}}{h^3}\left[\frac{1}{4} - \frac{\cos ht}{1+\mu f^0 t} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos 2ht}{(1+\mu f^0 t)^4} - \frac{\mu f^0}{h}\left(\frac{ht\cos ht}{(1+\mu f^0 t)^2} - \frac{3/2\,\sin 2ht}{(1+\mu f^0 t)^5}\right)\cdots\cdots\right]$$

$$-\varepsilon^2\frac{\mu}{\varrho}f^0\left[\frac{3}{2}\frac{h}{\mu f^0}\log(1+\mu f^0 t) + \frac{\frac{1}{4}\sin 2ht}{1+\mu f^0 t} + \frac{\mu f^0}{h}\left(-\frac{21}{8} + \frac{11\cos ht + \frac{5}{8}\cos 2ht}{(1+\mu f^0 t)^2}\right)\cdots\right]\cdots\cdots,$$

$$\theta = ht - \varepsilon\frac{\mu}{\varrho}\left(\frac{f^0}{h}\right)^2\left[1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f^0 t)^2} + \frac{\mu f^0}{h}\left(2ht - \frac{4\sin ht}{(1+\mu f^0 t)^3}\right) - 18\left(\frac{\mu f^0}{h}\right)^2\left(1 - \frac{\cos ht}{(1+\mu f^0 t)^4}\right)\cdots\right]$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2\left(\frac{f^0}{h}\right)^4\left[\frac{1}{4}ht - \frac{\sin ht}{1+\mu f^0 t} + \frac{\frac{1}{3}ht}{(1+\mu f^0 t)^3} + \frac{\frac{1}{8}\sin 2ht}{(1+\mu f^0 t)^4} + \frac{\mu f^0}{h}\left(1 - \frac{ht\sin ht}{(1+\mu f^0 t)^2} - \frac{\cos 2ht}{(1+\mu f^0 t)^5}\right)\cdots\right]$$

$$-\varepsilon^2\frac{\mu}{\varrho}\,\frac{f^0}{h}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{h}{\mu f^0}\right)^2(1+\mu f^0 t)\log(1+\mu f^0 t) - \frac{3}{2}\frac{h}{\mu f^0}\cdot ht + 9/8 - \frac{11 + \frac{1}{8}\cos 2ht}{1+\mu f^0 t} + \frac{\mu f^0}{h}\left(-\frac{21}{8}ht + \frac{\sin ht + \frac{1}{4}\sin 2ht}{(1+\mu f^0 t)^2}\right)\cdots\right]\cdots$$

In dem in diesen Reihen vorkommenden Coefficienten Q_1 hat man sich ebenfalls f^0 statt f gesetzt zu denken.

§ 53.

Aus den hier gegebenen Elementen der Bahn des Mittelpunkts ergeben sich nunmehr leicht jene der Bahn des Schwerpunkts.

Man hat nämlich (§ 43)

$$x^\circ = x - \varepsilon \sin\theta = x - \varepsilon \sin ht - \varepsilon^2 \cos ht \,.\, \varphi_1 \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial x^\circ}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \sin\theta}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \sin ht}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial(\cos ht \,.\, \varphi_1)}{\partial t} \ldots\ldots,$$

$$z^\circ = z - \varepsilon \cos\theta = z - \varepsilon \cos ht + \varepsilon^2 \sin ht \,.\, \varphi_1 \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial z^\circ}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \cos\theta}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \cos ht}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial(\sin ht \,.\, \varphi_1)}{\partial t} \ldots\ldots,$$

während θ und $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ eben sowohl auf den Schwerpunkt, wie auf den Mittelpunkt, als Umdrehungspunkt bezogen werden können (§19), und es sind hiernach unmittelbar auch die Integrale der Differentialgleichungen der Lage des Schwerpunkts gegeben.

Diese Gleichungen sind:

$$\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial t^2} = -\mu\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t} + \varepsilon\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\sqrt{\left[\left(\frac{\partial s^\circ}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^\circ}{\partial t}\sin\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left(\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2\right]},$$

$$\frac{\partial^2 z^\circ}{\partial t^2} = -\mu\left(\frac{\partial z^\circ}{\partial t} - \varepsilon\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\sqrt{\left[\left(\frac{\partial s^\circ}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^\circ}{\partial t}\sin\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left(\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2\right]},$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\varepsilon\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^\circ}{\partial t}\sin\theta + \varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\sqrt{\left[\left(\frac{\partial s^\circ}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{\partial x^\circ}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^\circ}{\partial t}\sin\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left(\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2\right]}.$$

Werden die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehenden Theile derselben in Reihen nach den Potenzen von ε entwickelt, so läßt sich zur Integration der Gleichungen das in §44 u. f. befolgte Verfahren anwenden, und man überzeugt sich leicht, daß die für $\frac{\partial x^\circ}{\partial t}$, $\frac{\partial z^\circ}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, x°, z°, θ oben gefundenen Ausdrücke ihnen wirklich Genüge leisten, und deren Integrale mit den gegebenen Anfangswerthen herstellen.

Man sieht hieraus, daß zwar die Differential-Gleichungen für die Bewegung des Mittelpunkts von einfacherer Gestalt sind als jene für die Bewegung des Schwerpunkts (§19), daß aber dennoch die Ausdrücke für die Coordinaten und übrigen Elemente der Bahn des letzteren Punktes sich einfacher ergeben als die der Bahn des ersteren entsprechenden Ausdrücke, und daß man daher, wenn man die Integration der, obgleich zusammengesetzteren, Gleichungen der Bewegung des Schwerpunkts auf dem im Vorigen eingeschlagenen Wege unternimmt, ohne viel größere Schwierigkeiten zum Ziele gelangen wird, als bei den auf die Bewegung des Mittelpunkts Bezug habenden Operationen.

Die Geschwindigkeit $\frac{ds^\circ}{dt}$ des Schwerpunkts, welche $= \sqrt{\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2\varepsilon\left(\frac{dx}{dt}\cos\theta - \frac{dz}{dt}\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt} + \left(\varepsilon\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]}$ ist (§25) (*), läßt sich, indem man diesen Ausdruck ebenfalls nach ε entwickelt,

(*) Man erinnere sich, daß in den Formeln des §25, welche die Umdrehung in der entgegengesetzten

und eben so endlich durch Integration den vom Schwerpunkt zurückgelegten Weg ξ°, in ähnlicher Form wie die verwandten Functionen $\frac{dx^\circ}{dt}$, x°..., darstellen.

Wollte man bei der Bestimmung der doppelten Bewegung des Geschosses noch auf die, bei den vorangehenden Rechnungen vernachlässigte, Schwerkraft Rücksicht nehmen, so würden dadurch zwar die oben angeführten Differential-Gleichungen für die Bahn des Schwerpunkts sich nur insofern ändern, daß in der zweiten derselben rechts vom Gleichheitszeichen das Glied $-g$ hinzukäme (524), die Arbeiten bei der weiteren Behandlung der Gleichungen würden sich aber aber dadurch, da die Integration in geschlossener Form nicht ausführbar ist, in sehr beträchtlichem Verhältnisse, vielleicht um das zehnfache, vervielfältigen.

§54.

Um die doppelte Bewegung eines rotirenden excentrischen Geschosses deutlicher anschaulich zu machen, mag es von Nutzen seyn, die Bahnen, welche der Schwerpunkt und der Mittelpunkt während der ersten Umdrehungen desselben beschreiben, numerisch zu berechnen und hiernach bildlich darzustellen.

Werden bei dieser Berechnung die in §50 den beständigen Größen beigelegten Zahlenwerthe, nach welchen die Anfangsgeschwindigkeit f° des Schwerpunkts gleich 792 ist, zum Grunde gelegt, so genügen, da t sehr klein ist, die ersten Glieder der Reihen für x, z, mit Ausschluß derjenigen, welche ε in der zweiten und höheren Potenzen enthalten, vollkommen, so daß man hat

$$x = \frac{1}{\mu}\log(1+\mu f^\circ t) + \varepsilon\left[\sin ht - 2\frac{\mu f^\circ}{h}\cdot\frac{1-\cos ht}{1+\mu f^\circ t}\right], \qquad x^\circ = \frac{1}{\mu}\log(1+\mu f^\circ t) - 2\varepsilon\frac{\mu f^\circ}{h}\cdot\frac{1-\cos ht}{1+\mu f^\circ t},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f^\circ}{1+\mu f^\circ t} + \varepsilon h\left[\cos ht - 2\frac{\mu f^\circ}{h}\cdot\frac{\sin ht}{1+\mu f^\circ t} + 2\left(\frac{\mu f^\circ}{h}\right)^2\frac{1-\cos ht}{(1+\mu f^\circ t)^2}\right], \qquad \frac{dx^\circ}{dt} = \frac{f^\circ}{1+\mu f^\circ t} - 2\varepsilon\frac{\mu f^\circ}{1+\mu f^\circ t}\left(\sin ht - \frac{\mu f^\circ}{h}\cdot\frac{1-\cos ht}{1+\mu f^\circ t}\right),$$

$$z = \varepsilon\left[\log(1+\mu f^\circ t) - 1 + \cos ht - \frac{\mu f^\circ}{h}\cdot\frac{\sin ht}{1+\mu f^\circ t}\right], \qquad z^\circ = \varepsilon\left[\log(1+\mu f^\circ t) - 1 - \frac{\mu f^\circ}{h}\cdot\frac{\sin ht}{1+\mu f^\circ t}\right],$$

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon h\left[-\sin ht + \frac{\mu f^\circ}{h}\cdot\frac{1-\cos ht}{1+\mu f^\circ t}\right], \qquad \frac{dz^\circ}{dt} = \varepsilon\frac{\mu f^\circ}{1+\mu f^\circ t}(1-\cos ht).$$

Richtung, als die Gleichungen (E) des §26 und die späteren Formeln, nämlich von Gx° gegen Gz°, voraussetzen, bei dem Gebrauche, der hier von denselben gemacht wird, der Winkel θ mit veränderten Zeichen zu nehmen ist.

Man findet

für $ht = \frac{1}{2}\pi$	$x = 3,130160$,	$z = -0,0199953$,	$x' = 3,110160$,	$z' = -0,0199953$,
$\frac{1}{2}\pi + 0,01051$ (§51)	$3,150999$,	$-0,0202050$,	$3,131000$,	$-0,0199952$,
π	$6,216298$,	$-0,0399741$,	$6,216298$,	$-0,0199741$,
$\frac{3}{2}\pi - 0,00971$ (§51)	$9,282274$,	$-0,0201472$,	$9,302273$,	$-0,0199530$,
$\frac{3}{2}\pi$	$9,301463$,	$-0,0199530$,	$9,321463$,	$-0,0199530$,
2π	$12,424613$,	$+0,0000518$,	$12,424613$,	$-0,0199482$,

u. s. w.

wobei der Fuß zur Längeneinheit genommen ist.

In der Figur 4, in welcher die mit der Achse Fz parallelen Maße ihrer geringen Werthe wegen in zehnfach größerem Verhältnisse als die Maße in der Richtung der Achse Fx aufgetragen sind, stellt FKMLH die Bahn des Mittelpunkts, GKNLJ jene des Schwerpunkts während der ersten Umdrehung vor. Den den Gleichungen (E.) (§26) entsprechenden Voraussetzungen gemäß liegt im Anfange der Bewegung der Schwerpunkt G unter dem Mittelpunkt F, und findet die Umdrehung in der Richtung statt, daß der Schwerpunkt bei der Umdrehung um den Mittelpunkt (oder der Mittelpunkt bei der Umdrehung um den Schwerpunkt) sich von Fz gegen Fx zu bewegt, wornach der von der Achse Fx an gegen z zu sich erstreckende Theil der Ebene zFx der vorwärtige Theil der, mit dieser Ebene (der Ebene der Figur) zusammenfallenden, Rotationsebene (§40) ist.

§55.

Über die Eigenschaften der beiden Curven, wie sie aus den abgekürzten Gleichungen derselben folgen, mögen noch folgende Bemerkungen hier Platz finden:

Die Bahn des Schwerpunkts weicht nur sehr wenig von der geraden Linie ab, in welcher die Richtung seiner anfänglichen Geschwindigkeit liegt. An den Punkten G, J . . ., für welche ht die Werthe 0, 2π . . . hat, ist die Berührende der Bahn mit dieser Linie parallel oder $\frac{dz'}{dt}$

gleich Null; die Coordinate z^0 ist jedoch an diesen Punkten weder ein Größtes noch ein Kleinstes, sondern die Bahn nähert sich, weil $\frac{\partial z^0}{\partial t}$ nie negativ werden kann, beständig, wiewohl sehr langsam, der Achse Fx, welche sie nach einem Zeitraum von mehr als zehn Stunden erreicht und überschreitet.

Die Bahn des Mittelpunkts entfernt sich abwechselnd von der Achse Fx, und nähert sich ihr wieder. Sie liegt schon am Punkte H, wo $kt = 2\pi$ ist, auf der andern Seite dieser Achse, auf der die z positiv sind; ihr größter Abstand von der Achse Fx beträgt hier aber nur etwa den zwanzigsten Theil eines Punktes. Die Richtung der Bahn ist an den Punkten F, H ..., für welche $kt = 0, 2\pi \ldots$ ist, mit der Achse Fx parallel, aber auch an zwischenliegenden Punkten M ..., und man findet z. B., indem man $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, und $kt = \pi - \delta$ setzt, den Werth von kt für das Minimum von z nahe $= \pi - \frac{2\mu f^0}{k + \mu f^0 \pi} = \pi - 0,008239$.

Für jeden Ort des Schwerpunkts oder des Mittelpunkts läßt sich die Lage der Centrallinie des Geschosses, oder der Ort, wo gleichzeitig der andere dieser beiden Punkte sich befindet, bestimmen, indem man für den zugehörigen Werth von t entweder den Winkel θ oder die Coordinaten dieses andern Punktes berechnet.

Während jeder ganzen Umdrehung des Geschosses müssen in zwei verschiedenen Augenblicken die Bahnen, welche der Schwerpunkt und der Mittelpunkt beschreiben, einander parallel werden, so oft nämlich die Richtung der Centrallinie gegen eine dieser Bahnen senkrecht wird (§ 25), welche Richtung sie demnach gleichzeitig gegen beide Bahnen annimmt. Bei dem Grade der Näherung, in welchem die Gleichungen der Bahnen im vorigen § gegeben sind, wornach $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}$, $\frac{\partial x^0}{\partial t} = \frac{\partial s^0}{\partial t}$ ist, kann man die Zeitpunkte, in welchen der Winkel $\theta = 0, \pi, 2\pi \ldots$ ist, für diejenigen nehmen, in welchen die gleichlaufende Richtung beider Bahnen Statt hat, indem für $\theta = 0, \pi, 2\pi \ldots$ die Theilgeschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial t}\sin\theta$ (*) $= + \frac{\partial s}{\partial t}$ oder $- \frac{\partial s}{\partial t}$ wird.

(*) Man vergleiche die Anmerk. zu § 53.

Man findet für $kt = \pi$ nach §47 $\theta = - 0{,}000847$, $\frac{\partial\theta}{\partial t} = k - 0{,}0084313$,

für $kt = 2\pi$ $\theta = 2\pi - 0{,}000128$, $\frac{\partial\theta}{\partial t} = k - 0{,}0155105$,

und kann hiernach $kt = \pi + 0{,}000847$ für $\theta = \pi$, $kt = 2\pi + 0{,}000128$ für $\theta = 2\pi$ setzen.

Bei jeder ganzen Umdrehung des Geschosses müssen sich ferner die Bahnen des Schwerpunktes und des Mittelpunktes zwei Mal durchschneiden, und man kann ohne erheblichen Fehler als Durchschnittspunkte diejenigen Punkte annehmen, wo der Schwerpunkt in den Augenblicken sich befindet, in welchen die Centrallinie eine Berührende der Bahn des Mittelpunkts ist oder die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ einen größten oder kleinsten Werth hat (§51).

Für das erste Minimum dieser Geschwindigkeit ist kt nahe $= \frac{1}{2}\pi + 0{,}01051$, und die Coordinaten des Schwerpunkts im letzteren Zeitpunkte sind $x^{\circ} = 3{,}131$ und $z^{\circ} = 0{,}019952$, welche als die Coordinaten des ersten Durchschnittspunktes gelten können. Ihnen nahe gleich sind die Coordinaten des Mittelpunktes für $kt = \frac{1}{2}\pi$, oder im Augenblicke, wenn $kt = \frac{1}{2}\pi$ ist, befindet sich der Mittelpunkt im Orte des ersten Durchschnittspunktes. Ebenso hat man kt nahe $= \frac{3}{2}\pi - 0{,}00971$ für den Augenblick des ersten Maximums der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, und für denselben Zeitpunkt die Coordinaten des Schwerpunkts $x^{\circ} = 9{,}302273$, $z^{\circ} = 0{,}019953$, welche für die Coordinaten des zweiten Durchschnittspunktes genommen werden können, an dessen Ort der nun nachfolgende Mittelpunkt erst in dem Augenblicke, wenn $kt = \frac{3}{2}\pi$ ist, gelangt.

Es ist leicht ersichtlich, daß die beiden Winkel, welche die Bahn des Mittelpunkts mit der durch die beiden Durchschnittspunkte irgend einer Umdrehung gehenden geraden Linie, oder auch mit der die beiden Orte des Mittelpunkts zu den Zeiten der größten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit einer Umdrehung verbindenden geraden Linie, bildet, sehr nahe einander gleich seyn müssen. Ist α der Werth eines dieser beiden Winkel, und β der Winkel, den die gerade Linie mit der Achse Fx einschließt, so macht an dem einen dieser beiden Orte des Mittelpunkts die Bahn desselben, d. i. die Centrallinie des Geschosses, mit der Achse Fx einen Winkel $= \alpha + \beta$, und am anderen der beiden Punkte einen Winkel $= \alpha - \beta$. Hat man nun auf

irgend eine Art den Winkel $\alpha+\beta$ gleich m, und den Winkel $\alpha-\beta$ gleich n gefunden, so ergibt sich daraus der Winkel $\alpha = \frac{m+n}{2}$, und der Winkel β, welchen man für die mittlere Neigung der Bahn des Schwerpunkts während der Umdrehung, worauf sich dieser Winkel bezieht, gegen die Achse Fx nehmen kann, $= \frac{m-n}{2}$. Hat man z. B. nach §47 den Winkel δ für den Augenblick der kleinsten Winkelgeschwindigkeit während der $(r+1)^{ten}$ Umdrehung gleich $\frac{4r+1}{2}\pi+b$, und für den Augenblick der größten Winkelgeschwindigkeit während dieser Umdrehung gleich $\frac{4r+3}{2}\pi-a$ erhalten, indem man die hierzu gehörigen Werthe von kt zuvor vermittelst der Gleichung (n) berechnet hat, so ist $m=a$, $n=b$, und es ergibt sich $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$.

Unmittelbar aber gibt der Ausdruck für $\frac{dz^\circ}{dx^\circ}$, welchen man aus den Reihen des §52 für $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{dx}{dt}$ erhält, die Neigung der Bahn des Schwerpunkts gegen die Achse Fx in jedem Augenblicke seiner Bewegung. Dieser Ausdruck ist

$$\frac{dz^\circ}{dx^\circ} = \frac{\varepsilon\mu(1-\cos kt)\ldots}{1-2\varepsilon\mu\left(\sin kt - \frac{\mu f^\circ}{k}\cdot\frac{1-\cos kt}{1+\mu f^{\circ 2}}\right)\ldots},$$

und zeigt, daß die mittlere Neigung dieser Bahn, welche die Richtung gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene hat, während der ersten Umdrehungen gleich $\varepsilon\mu$ ist, und sonach, für ε und μ die numerischen Werthe des §50 gesetzt, nur 0,859 Raum-Sekunden beträgt. Die Neigung der Bahn wird doppelt so groß und erreicht ihren größten Werth, wenn kt nahe gleich $\pi, 3\pi \ldots$ ist, geht aber für $kt = 2\pi, 4\pi \ldots$ wieder auf Null zurück, und ist daher im Augenblicke der Vollendung des ersten Umlaufes, in welchem $kt = 2\pi + 0,000128$ ist, zwar nicht ganz Null, aber verschwindend klein, daher auch bei der zweiten Umdrehung die mittlere Neigung der Bahn wieder ganz nahe eben so groß wie bei der ersten.

Die Zeitpunkte, wann die größten und kleinsten Werthe der Neigung Statt finden, gibt die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^2z^\circ}{dx^{\circ 2}} = 0, \text{ oder } \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dz}{dt} = 0,$$

aus welcher man für die ersten Umdrehungen durch Entwickelung die Gleichung:

$$\sin kt = 2\varepsilon\mu(1-\cos kt)\left(1-\left(\frac{\mu f^0}{k}\right)^2\cdot\frac{1-\cos kt}{(1+\mu f^0 t)^2}\right)$$

erhält, der durch $kt = 2\pi, 4\pi \ldots.$, und auch durch Werthe von kt, die um wenig kleiner als $\pi, 3\pi \ldots.$ sind, Genüge geschieht.

Die Punkte der Bahn, an welchen deren Richtung gegen die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts ein Größtes oder ein Kleinstes ist, sind zugleich deren Wendungspunkte oder diejenigen Punkte, an welchen die Bahn die Richtung ihrer Krümmung verändert, oder die Berührende auf die andere Seite der Curve übertritt.

Eben so findet man in Bezug auf die Bahn des Mittelpunkts aus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \text{ oder } \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

für die ersten Annäherungen die Gleichung:

$$0 = \cos kt + \varepsilon\frac{h}{f^0}\left[1+\mu f^0 t - \frac{\mu f^0}{k}\sin kt + \left(\frac{\mu f^0}{k}\right)^2\frac{1}{1+\mu f^0 t}\left(\cos kt(1-\cos kt) - 2\left(\sin kt - \frac{\mu f^0}{k}\,\frac{1-\cos kt}{1+\mu f^0 t}\right)^2\right)\right],$$

welche bei Vergleichung mit der Gleichung (n) des §51 zeigt, daß die Wendungspunkte dieser Bahn mit denjenigen Punkten derselben, wo die Umdrehungsgeschwindigkeit des Geschosses ein Größtes oder ein Kleinstes ist, somit auch mit den Durchschnittspunkten beider Bahnen, ohne daß jedoch diese verschiedenen Punkte ganz dieselben sind, nahe zusammenfallen.

§56.

Die für den Winkel θ und die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ im Vorigen mitgetheilten Reihen (§47), und eben so die auf den veränderlichen Theil dieser Geschwindigkeit Bezug habenden Haupttheile der Reihen für $\frac{\partial x}{\partial t}$, $x \ldots.$, können, wie man sieht, nur dann als brauchbar betrachtet werden, wenn der Bruch $\frac{f}{k}$ nicht groß, oder wenn der Anfangswerth von $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ gegen den Anfangswerth der fortschreitenden Geschwindigkeit des Geschosses verhältnißmäßig groß ist, indem, wenn anders t nicht sehr klein ist, nur in solchem Falle die genannten Reihen gehörig convergiren.

Wie es sich mit dieser Eigenschaft derselben verhält, wird sich aus folgenden Betrachtungen ergeben.

Nimt man für den ersten Anfang der Bewegung, wie ohne großen Irrthum

geschehen kann, die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ des Mittelpunkts als beständig oder gleich f, und, da die mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts parallele Fx zur Achse der x genommen ist, $\frac{dz}{dt}$ gleich Null, somit $\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = f$ an, so geht die dritte der Differentialgleichungen (K) für die Bewegung des Mittelpunkts (§ 44) auf

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\varepsilon\frac{\mu}{\varrho} f^2 \cos\theta$$

zurück. Anstatt des nach der Richtung der Umdrehung (von der Achse Fz gegen die Achse Fx) gerechneten Winkels θ zwischen der Achse Fz und dem in der Richtung der Centrallinie auf der dem Schwerpunkt G entgegengesetzten Seite des Mittelpunkts F liegenden Halbmesser ist es für den vorliegenden Zweck geeigneter, einen andern Winkel $\tau = 90° + \theta$ einzuführen, welcher, gleichfalls nach der Richtung der Umdrehung gerechnet, zwischen dem negativen Theil der Achse der x und demselben Halbmesser enthalten, und demnach, wenn im Anfange der Umdrehung der Schwerpunkt in der Achse der x liegt, entweder gleich Null oder gleich 180° ist, je nachdem dieser Punkt sich vor oder hinter dem Mittelpunkt befindet. Dadurch verwandelt sich die letztere Gleichung in folgende:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\varepsilon\frac{\mu}{\varrho} f^2 \sin\tau,$$

welche, indem man sie mit $2\frac{d\tau}{dt}$ multiplicirt, das erste Integral

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = +2\varepsilon\frac{\mu}{\varrho} f^2 \cos\tau + C$$

gibt. Zur Bestimmung der Constante hat man, wenn beim Anfange der Bewegung $\frac{d\tau}{dt}$ oder $\frac{d\theta}{dt} = k$, $\tau = \alpha$, (*) war, $k^2 = C + 2\varepsilon\frac{\mu}{\varrho} f^2 \cos\alpha$, wodurch, indem man zur Abkürzung m statt $\varepsilon\frac{\mu}{\varrho} f^2$ setzt,

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = k^2 + 2m(\cos\tau - \cos\alpha)$$

wird. Vermöge dieses Ausdrucks erhält unter den obigen Voraussetzungen die Geschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ immer denselben Werth, so oft die Centrallinie bei der Umdrehung

(*) Wenn hier der Allgemeinheit wegen der Winkel α, nicht, wie im Vorigen (§ 26 u. folg.) geschehen ist, gleich 90° (d. i. $\theta = 0$ für $t = 0$), angenommen wird, so fällt zwar die Richtung der Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts im Anfange der Bewegung nicht mehr ganz mit der Achse Fx zusammen, und ist f nicht mehr $= f_0 + \varepsilon k$; jedoch wird augenfällig hierdurch die Richtigkeit dessen, was hier gezeigt werden soll, nicht im Wesentlichen beeinträchtigt.

des Geschosses die gleichen Winkel mit den festen Achsen macht, und ist ihr Werth, in Übereinstimmung mit §24, der kleinstmögliche, wenn der Winkel $\tau = \pi, 3\pi \ldots$ ist, d. i. wenn der Schwerpunkt in der Achse Fx hinter dem Mittelpunkt liegt, der größtmögliche dagegen, wenn τ ein gerades Vielfaches von π ist, oder der Schwerpunkt sich in der Achse Fx vor dem Mittelpunkte befindet.

Ist nun $\frac{k^2}{2m} - \cos\alpha_1$ größer als 1, so kann $\frac{d\theta}{dt}$ nicht gleich Null werden, das Geschoß dreht sich ganz um, und setzt seine Umdrehungsbewegung bis zu unbestimmter Zeit fort; ist $\frac{k^2}{2m} - \cos\alpha_1$ gleich 1, so wird $\frac{d\theta}{dt}$ gleich Null für $\tau = \pi$, und es muß ein Stillstand in der Bewegung eintreten, sobald der Schwerpunkt hinter dem Mittelpunkt in der Achse Fx ankommt; wenn aber $\frac{k^2}{2m} - \cos\alpha_1$ kleiner als 1 ist, so muß das Geschoß schon früher in der Richtung, nach welcher es Umdrehung angenommen hat, zu rotiren aufhören, und wird für diesen Fall $\frac{k^2}{2m} - \cos\alpha_1 = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ gesetzt, so wird $\frac{d\theta}{dt} = 0$ für $\tau = \alpha$, und für größeren Werthe von τ unmöglich.

Es folgt hieraus, daß, wenn $\frac{k^2}{2m} - \cos\alpha_1$ kleiner als 1, oder k kleiner als $\sqrt{2m(1+\cos\alpha_1)}$, und der Ausdruck für $\frac{d\theta}{dt}$ in Form einer nicht abbrechenden Reihe gegeben ist, dieser Ausdruck für Werthe von τ, welche größer als α, oder für Werthe von t, welche größer als der dem Winkel $\tau = \alpha$ entsprechende sind, auf eine Ungereimtheit führen muß, und es läßt sich hieraus ferner folgern, daß auch die oben entwickelten Reihen für $\theta, \frac{d\theta}{dt} \ldots$, wenn k nicht groß genug ist, um ganze Umdrehungen zuzulassen, nur für kleine Werthe von t, welche den dem größtmöglichen Werth von θ entsprechenden bei weitem nicht erreichen, noch in brauchbarer Weise convergiren können.

Nach den oben (§50) angewendeten Zahlenwerthen hat man $m = \frac{800.800}{50.192} = \frac{200}{3}$, und wenn man ferner α_1 wie bisher gleich 90° annimmt, $\sqrt{2m(1+\cos\alpha_1)} = 11,547\ldots$ Ist daher k nicht beträchtlich größer als dieser Werth, und behalten übrigens die Größen $f, \varepsilon, \mu, \varsigma$ die ihrigen bei, so wird das Geschoß nur wenige oder keine ganze Umdrehungen machen, und werden die genannten Reihen, so weit man sie auch entwickelt, nur für sehr kleine Werthe von t convergiren können.

§ 57.

Wird die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ gleich Null, noch ehe der Winkel τ gleich $180°$ geworden ist, oder ist der aus der Gleichung $\frac{k^2}{2m} - \cos\alpha_{,} = \cos(180° - \alpha)$ sich ergebende Winkel α kleiner als $180°$, so wird das Geschoß von dem Augenblicke an, in welchem die Umdrehung nach der anfänglichen Richtung aufhört, nach der entgegengesetzten zu rotiren beginnen. Behält man auch für diese entstehende Bewegung die Richtung der positiven Winkel θ und τ, und die Richtung der positiven Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ in dem Sinne, wie für die anfängliche Rotation, bei, so wird diese Geschwindigkeit jetzt negativ, und es bleibt die Gleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\varepsilon\frac{\mu}{\varrho}f^2\cos\theta \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = -\varepsilon m\sin\tau$$

noch immer anwendbar, sie muß aber so integrirt werden, daß $\frac{d\tau}{dt}$ oder $\frac{d\theta}{dt}$ für $\tau = \alpha$ verschwindet, wodurch man

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 2m(\cos\tau - \cos\alpha)$$

erhält. Dieses Integral zeigt, daß die Geschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ für $\tau = 0$ wieder ihren größten Werth bekömt, und daß sie ebenfalls für $\tau = -\alpha$ verschwindet, woraus zugleich folgt, daß das Geschoß nach Art eines Pendels vorwärts und rückwärts schwingt, und daß die Weite seiner Schwingungen, welche gleichdauernd sind, von der Achse Fa an gerechnet, dem Winkel α gleich ist. Setzt man wieder $\frac{k^2}{2m} - \cos\alpha_{,}$ anstatt $-\cos\alpha$ in die Gleichung, so hat man wie oben

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = k^2 + 2m(\cos\tau - \cos\alpha_{,}),$$

woraus erhellet, daß, wenn τ gleich $\alpha_{,}$ wird, oder wenn die Centrallinie wieder in ihre anfängliche Lage gegen die festen Achsen kömt, und eben so für $\tau = -\alpha_{,}$, der absolute Werth von $\frac{d\theta}{dt}$ wieder gleich k wird.

Die Gleichung für die Bewegung eines, seine Schwingungen von dem Elongationswinkel α aus ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnenden, einfachen Pendels von der Länge a im luftleeren Raume ist, wenn g die Beschleunigung der Schwere wie in §1

bedeutet, und der Winkel θ von der Vertikalen durch den Aufhängepunkt nach der einen oder der anderen Seite gerechnet wird,

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 = 2\frac{g}{a}(\cos\theta-\cos\alpha) \text{ (*)},$$

und mit der Gleichung $\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2 = 2m(\cos\tau-\cos\alpha)$, wenn m statt $\frac{g}{a}$ und τ statt θ gesetzt wird, identisch.

Ein excentrisches Geschoß mit sphärischer Oberfläche, welches, ohne ganze Umdrehungen zu machen, rotirt, schwingt daher, vorausgesetzt, daß dessen Mittelpunkt mit einer nach Größe und Richtung beständigen Geschwindigkeit sich bewegt, im widerstehenden Mittel nach demselben Gesetze zu beiden Seiten der Richtungslinie dieser Geschwindigkeit, nach welchem ein einfaches Pendel von der Länge $\frac{g}{m} = \frac{g\varsigma}{\varepsilon\mu f^2}$ im luftleeren Raume zu beiden Seiten der durch den Aufhängepunkt gehenden Vertikalen schwingt. Man kann auch sagen, der Schwerpunkt schwingt unter diesen Voraussetzungen als materieller Punkt um den Mittelpunkt (oder der Mittelpunkt um den Schwerpunkt) mit einer beschleunigenden Kraft $= m\varepsilon = \frac{\mu}{\varsigma}\varepsilon^2 f^2$. Die Dauerzeit einer ganzen Schwingung, von $\tau = \alpha$ bis $\tau = -\alpha$, für kleine Werthe von α, ist $= \pi\sqrt{\frac{1}{m}} = \frac{\pi}{f}\sqrt{\frac{\varsigma}{\varepsilon\mu}}$.

Nach den obigen Beispielswerthen der beständigen Größen hat man, die Größe G zu 34,238 württemb. Fuß angenommen,

$\frac{g}{m} = 0{,}5136$, $m\varepsilon = \frac{4}{3}$, in Füßen, und $\pi\sqrt{\frac{1}{m}} = \pi\sqrt{\frac{3}{200}} = 0{,}385$ in Zeitsekunden.

Ein sphärisches Geschoß, dessen Schwerpunkt und Mittelpunkt zusammenfallen, kann nur ganze Umdrehungen mit beständiger, vom Widerstande der Luft unabhängiger (§ 20, 21) Winkelgeschwindigkeit machen, und aus den pendelartigen Schwingungen eines Geschosses in seiner Bahn läßt sich daher auf Excentricität desselben schließen.

Wäre die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ des Mittelpunktes eines excentrischen Geschosses nach Größe und Richtung wirklich beständig, so würden, wie aus der Gleichung $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = h^2 + 2m(\cos\tau - \cos\alpha)$ folgt, die Umdrehungen desselben, sie mögen totale oder partielle seyn, ebenfalls in Größe und Geschwindigkeit

(*) P. Méc. I. no 182.

stets unverändert bleiben. In Wirklichkeit muss aber, weil jene Beständigkeit nicht Statt hat, die Umdrehungsgeschwindigkeit, ob sie gleich während jedes Umlaufes wächst und abnimmt, im Ganzen genommen fortwährend abnehmen, wie dieses aus den früheren Berechnungen hervorgeht, und die oben dargestellten Integrale der Gleichungen für die doppelte Bewegung des Geschosses enthalten das Gesetz dieser Abnahme. Aus den totalen Umdrehungen können daher partielle, und diese letzteren müssen, wenn auch langsam, fortdauernd kleiner werden. Die Berechnung der doppelten Bewegung eines pendelartig sich drehenden Geschosses wäre, weil bei solcher Umdrehung der zurückgelegte Weg und die Geschwindigkeit nicht mehr stetig nach demselben Gesetze fortgehende, sondern discontinuirliche Functionen der Zeit t sind, jedenfalls nur abschnittweise auszuführen, und mit Hülfe der obigen Integrale, da diese auf den Fall $h = 0$ keine Anwendung gestatten, in welchem Umfange sie auch interessant wären, höchstens nur bis zu dem Augenblicke, in welchem die Umdrehungsgeschwindigkeit das erste Mal gleich Null wird, zu bewerkstelligen.

Man bemerke noch, dass, wenn bei hinreichender Dauer der Bewegung die pendelartigen Schwingungen des Geschosses allmählig kleiner werden und zuletzt aufhören, der Schwerpunkt dem Mittelpunkt zu gleicher Zeit in der Bewegung vorangehen muss. Denn obgleich vermöge der Gleichung $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\varepsilon\frac{n}{g}f^2\cos\delta$ die Beschleunigung der Umdrehung gleich Null ist, sowohl wenn der Schwerpunkt vor, als wenn er hinter dem Mittelpunkt in der Linie Fx sich befindet, so ist doch nur dann, wenn beim Verschwinden der Umdrehungsgeschwindigkeit der Schwerpunkt vorn, nicht aber, wenn er hinten ist, keine weitere Umdrehung mehr möglich, wie die Gleichung $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 2m(\cos\tau - \cos\alpha)$ dadurch anzeigt, dass sie $\frac{d\tau}{dt}$, wenn $\alpha = 0$ ist, für keinen, wenn aber $\alpha = 180°$ ist, für jeden Werth von τ möglich gibt. Der erstere Fall entspricht

dem Zustande des Dauernden, der letztere dem des augenblicklichen Gleichgewichts.(**)

Daß endlich auch die die umdrehende Bewegung betreffenden Ergebnisse der vorangehenden Entwickelungen nicht als ohne Beschränkung richtig werden bestehen können, wenn, wie dieses angenommen werden muß, noch andere als die dabei vorausgesetzten Einwirkungen auf die Achse des Geschoßes Statt finden (386), ist für sich klar.

(**) Der Fall, daß $\frac{dr}{dt} = 0$ wird, wenn $\alpha = 180°$ ist, kann eigentlich gar nicht vorkommen, weil, wenn $k^2 = 2m(1+\cos\alpha)$ ist, das Geschoß einer unendlichen Zeit bedarf, um sich soweit zu drehen, bis der Schwerpunkt in der Achse Fx hinter dem Mittelpunkt anlangt, wie aus P. Méc. I. N° 181 folgt. Das Geschoß muß daher entweder ganz umlaufen, oder es muß, noch ehe es seine Umdrehung so weit vollführt hat, daß der Schwerpunkt und der Mittelpunkt sich in der angegebenen gegenseitigen Lage befinden, sich in der entgegengesetzten Richtung zu drehen anfangen oder auch ganz aufhören sich zu bewegen.

Zweites Capitel.

Untersuchungen über die Gesetze der Bewegung rotirender sphärischer Geschoße mit Rücksicht auf die Luftreibung.

§58.

Außer dem im vorigen Kapitel betrachteten Widerstande, den ein in einem flüssigen Mittel sich bewegender Körper in normaler Richtung auf seine Oberfläche erleidet, und welcher eigentlich das ist, was man gewöhnlich unter dem Namen, Widerstand des flüssigen Mittels, begreift, muß dieses noch durch Reibung zwischen der Oberfläche des Körpers und den sie berührenden Flüssigkeitstheilchen, oder auch nur durch Adhäsion, einen, wenn auch geringen, Widerstand auf den Körper ausüben, dessen Richtung an jedem Punkte M, wo die Berührung Statt findet, in die die Oberfläche berührende Ebene fällt.

Diese Art des Widerstandes, welche sich in mehrfacher Beziehung von jener, welche die Reibung zwischen festen Körpern erzeugt, unterscheidet, wird bei gasförmigen Flüssigkeiten, und insbesondere bei der atmosphärischen Luft, von der es sich hier zunächst handelt, bedingt:

1) durch die berührende Geschwindigkeit des Punktes M der Oberfläche, in Bezug auf welchen der Widerstand betrachtet wird, d. i. durch den bei der Zerlegung der Totalgeschwindigkeit dieses Punktes nach zwei auf einander winkelrechten Richtungen, von welchen die eine am Punkt M normal auf der Oberfläche ist (§5), in die berührende Ebene an demselben Punkte fallenden Theil der letzteren Geschwindigkeit. Ist diese Theilgeschwindigkeit gleich Null, so findet, so ferne von der durch den Körper in der Luft selbst hervorgebrachten Bewegung

abgesehen wird, kein Widerstand an dem genannten Punkte Statt.

2) durch die Dichtigkeit der Luft, welche, eine Function der normalen Geschwindigkeit des Punktes M, im Allgemeinen von der Dichtigkeit im ruhenden Zustande verschieden ist, und zu dem Drucke, den die Luft an demselben Punkte auf die Oberfläche ausübt, in unmittelbarer Beziehung steht.

3) durch den Grad der Glätte oder Rauhheit der Oberfläche, indem Erhabenheiten und Vertiefungen den berührenden Lufttheilchen mehr Fläche, und diese theilweise in geneigter Richtung, darbieten.

4) durch die Größe der mit der Luft in Berührung tretenden Fläche.

Man kann demnach den in Rede stehenden Widerstand, dessen Abhängigkeit von den genannten Bedingungen weder auf dem Wege der Erfahrung, noch a priori, sich mit Sicherheit bestimmen läßt, der einfachsten Voraussetzung gemäß, der berührenden Geschwindigkeit, der Dichtigkeit der Luft und der Größe der Fläche proportional annehmen, und durch den Ausdruck

$$\varrho V d\omega$$

darstellen, in welchem V die berührende Geschwindigkeit des Punktes M, $d\omega$ das Flächen-Element an diesem Punkt, und ϱ einen der Dichtigkeit der Luft an demselben proportionalen, zugleich von dem Grade der Glätte abhängigen, positiven Factor bedeutet. Eben dieser Factor muß aus zwei Gliedern bestehen, wovon das eine auf die Dichtigkeit der Luft im ruhenden Zustande allein, das andere aber zugleich auf die Veränderungen, welche die Dichtigkeit an jedem Punkte der Oberfläche durch die normale Geschwindigkeit desselben erleidet, und welche im Allgemeinen am vordern Theile des Körpers in Verdichtung, am hintern Theile in Verdünnung bestehen, sich bezieht, und, da die Wissenschaft bis jetzt über diese Veränderungen keinen nähern Aufschluß gibt, einfach nur der normalen Geschwindigkeit proportional angenommen werden kann. Man kann somit

$$\varrho = n\frac{D}{g}(k+V')$$

setzen, in welchem Ausdrucke D die Dichtigkeit der Luft im ruhenden

Zustande, V die normale Geschwindigkeit irgend eines Punktes M der Oberfläche (31), n und k aber positive Größen bedeuten, von denen die erstere eine abstracte Zahl ist, deren Werth von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängt, und mit dem Grade der Glätte derselben von einem Punkte zum andern sich ändern kann, die andere k aber, so wie V, eine Längengröße oder lineare Geschwindigkeit vorstellt, so daß der Ausdruck $\zeta V d\omega$, so wie der analoge $n\frac{D}{g}V'd\omega$ des 36, die Dimension eines Gewichtsmaßes oder einer bewegenden Kraft hat.

Die Geschwindigkeit V ist in dem einen der beiden Theile, in welche die Oberfläche durch die der Gleichung $V=0$ entsprechende Curve zerfällt, positiv, im andern negativ, die Luft daher an jenem Theile dichter, an diesem dünner als im Gleichgewichtszustande, und der Factor ζ kann hiernach, wenn der absolute Werth von V groß genug ist, negativ werden. Weil aber die Dichtigkeit der Luft nicht negativ werden kann, so muß dieser Factor für alle Werthe von V, durch welche er negativ würde, oder in Bezug auf sämmtliche Theile der Oberfläche, wo dieses der Fall wäre, gleich Null angenommen werden. Weil ferner im luftleeren Raume keine Reibung oder Adhäsion der Lufttheilchen denkbar ist, wonach ζ, und somit $k+V$, gleich Null werden muß, wenn V, absolut genommen, so groß ist, daß die Luft hinter den mit dieser Geschwindigkeit sich bewegenden Theilen des Körpers nicht schnell genug nachfolgen kann, um den Raum, den sie einnehmen, im Augenblicke des Verlassens sogleich wieder auszufüllen, so muß k als diejenige Geschwindigkeit betrachtet werden, mit welcher die Luft in den leeren Raum eindringt, und welche an der Oberfläche der Erde, bei Null Grad Temperatur und 0,76 Meter Barometerhöhe, etwa 395 Meter beträgt.

Die berührende Geschwindigkeit V', deren Richtung an keinem Punkte der Oberfläche mit der Richtung der Totalgeschwindigkeit desselben jemals einen stumpfen Winkel bildet, kann dagegen, welche Lage in der berührenden Ebene sie übrigens haben mag, nur als positiv genommen werden.

§ 59.

Werden die im § 5 eingeführten Zeichen auch hier in der daselbst festgesetzten Bedeutung genommen, und bezeichnen ferner

λ', μ', ν' die Winkel, welche die Projection der Totalgeschwindigkeit des Punktes M auf die berührende Ebene an diesem Punkte, in welche Projection eben die Geschwindigkeit V' fällt, mit den Parallelen Mx°, My°, Mz°, ferner

$\lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1$ die Winkel, welche dieselbe Projection mit den Parallelen Mx_1, My_1, Mz_1 in irgend einem Zeitpunkte der Bewegung bildet, so findet man, indem man den durch die Luftreibung entstehenden Widerstand, wie im § 6 den normalen Widerstand, als bewegende Kraft betrachtet und nach diesen Parallelen zerlegt, und indem man, die Construction auf die genannte Projection statt auf die Normale MN beziehend, übrigens ebenso wie bei der Ableitung der Gleichungen (A) und (B) des § 6 schließt und zu Werke geht, für die doppelte Bewegung des Körpers folgende sechs Gleichungen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x^\circ}{dt^2} &= -\frac{n'D}{M}\int(k+V)\,V'\cos\lambda'\,d\omega, \\ \frac{d^2y^\circ}{dt^2} &= -\frac{n'D}{M}\int(k+V)\,V'\cos\mu'\,d\omega, \\ \frac{d^2z^\circ}{dt^2} &= -g-\frac{n'D}{M}\int(k+V)\,V'\cos\nu'\,d\omega, \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (O)$$

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,rq &= n'D\int(k+V)(z_1\cos\mu'_1-y_1\cos\nu'_1)\,V'\,d\omega, \\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr &= n'D\int(k+V)(x_1\cos\nu'_1-z_1\cos\lambda'_1)\,V'\,d\omega, \\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,qp &= n'D\int(k+V)(y_1\cos\lambda'_1-x_1\cos\mu'_1)\,V'\,d\omega, \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (Q)$$

in welchen Gleichungen die angedeuteten Integrale der Bemerkung im vorigen § gemäß nur diejenigen Theile der Oberfläche, in welchen die Größe $k+V$ positiv ist, zu umfassen haben, und, wenn zugleich auf den normalen Widerstand Rücksicht genommen werden soll, auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens noch die auf diesen Widerstand Bezug habenden Glieder der Gleichungen (A) und (B) beizufügen sind.

Sind nun u, v, w, die den festen Achsen Ox°, Oy°, Oz°, so wie u_1, v_1, w_1 die den Hauptachsen Gx_1, Gy_1, Gz_1 parallelen Theile der Totalgeschwindigkeit des Punktes M, und x', y', z' (§ 9) die den letzteren Achsen parallelen Theile der fortschreitenden Geschwindigkeit dieses Punktes, und werden ferner $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in der Bedeutung wie im § 11 genommen, so hat man in irgend einem der Zeit t entsprechenden Augenblicke der Bewegung

$$\left.\begin{aligned} u &= V\cos\lambda + V'\cos\lambda' = \frac{\partial x^\circ}{\partial t} + \alpha(qz_1 - ry_1) + \beta(rx_1 - pz_1) + \gamma(py_1 - qx_1), \\ v &= V\cos\mu + V'\cos\mu' = \frac{\partial y^\circ}{\partial t} + \alpha'(qz_1 - ry_1) + \beta'(rx_1 - pz_1) + \gamma'(py_1 - qx_1), \\ w &= V\cos\nu + V'\cos\nu' = \frac{\partial z^\circ}{\partial t} + \alpha''(qz_1 - ry_1) + \beta''(rx_1 - pz_1) + \gamma''(py_1 - qx_1), \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= V\cos\lambda_1 + V'\cos\lambda_1' = x' + qz_1 - ry_1, \\ v_1 &= V\cos\mu_1 + V'\cos\mu_1' = y' + rx_1 - pz_1, \\ w_1 &= V\cos\nu_1 + V'\cos\nu_1' = z' + py_1 - qx_1, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

durch welche Beziehungen statt der Producte $V'\cos\lambda' \ldots$, $V'\cos\lambda_1' \ldots$ die Producte $V\cos\lambda \ldots$, $V\cos\lambda_1 \ldots$ in die Gleichungen (O) und (A) sich einführen lassen, worauf dann weiter

$$V = u_1\cos\lambda_1 + v_1\cos\mu_1 + w_1\cos\nu_1, \text{ und}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \alpha\cos\lambda_1 + \beta\cos\mu_1 + \gamma\cos\nu_1 \\ \cos\mu &= \alpha'\cos\lambda_1 + \beta'\cos\mu_1 + \gamma'\cos\nu_1 \\ \cos\nu &= \alpha''\cos\lambda_1 + \beta''\cos\mu_1 + \gamma''\cos\nu_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

gesetzt werden kann. Zur Bestimmung von V' aber dient die Gleichung

$$V'^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - V^2,$$

in welcher $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ dem Quadrate der Totalgeschwindigkeit des Punktes M gleich ist.

§ 60.

Bei der weiteren Behandlung der Gleichungen (O) und (A), welche allgemein für jede Gestalt und Beschaffenheit des Geschoßes gültig sind, wird das letztere der Einfachheit wegen als eine volle oder hohle Kugel, deren Masse so vertheilt ist, daß der Schwerpunkt mit dem Mittel-

punkt zusammenfällt, und daß die Drehungs-Momente in Bezug auf sämtliche Durchmesser gleich sind oder daß sämtlichen Durchmessern die Eigenschaft der Hauptachsen zukommt, angenommen werden, indem der Einfluß der Luftreibung auf die doppelte Bewegung des Geschosses, wenn überhaupt ein solcher vorhanden ist, schon bei einem Geschosse der angegebenen Art als Ergebniß der Rechnung aus dieser hervorgehen muß. Zu den Hauptachsen Gx, Gy, Gz kann man demnach drei beliebige unter sich rechtwinklige Halbmesser wählen, wenn nur immer dieselben Halbmesser als solche beibehalten werden. Auch kann man, weil zwischen den Coordinaten des Schwerpunkts und des Mittelpunkts nicht mehr zu unterscheiden ist, durchaus x, y, z statt x^0, y^0, z^0, und ebenso $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ statt $\frac{dx^0}{dt}, \frac{dy^0}{dt}, \frac{dz^0}{dt}$ etc. setzen.

Man wird überdieß voraussetzen, daß die Oberfläche der Kugel in ihrer ganzen Ausdehnung von gleicher Beschaffenheit sey, so daß der Coefficient κ' für alle Theile der Oberfläche denselben Werth behält.

Ist l der Halbmesser der Kugel, so hat man nach §7, da die mit $\alpha, \delta, \varepsilon$ daselbst bezeichneten Coordinaten des Mittelpunkts hier gleich Null sind,

$$\cos\lambda_1 = \frac{x_1}{l},\ \cos\mu_1 = \frac{y_1}{l},\ \cos\nu_1 = \frac{z_1}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

und $V = \frac{1}{l}(x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)$ (5)

oder auch $= \frac{f}{l} \cdot a'$, wenn den Zeichen f und a' dieselbe Bedeutung wie im §10 beigelegt wird.

Die Begränzungsebene des normalen Widerstandes, welche $V=0$ zur Gleichung hat (§8), geht demnach durch den Mittelpunkt der Kugel, und ist senkrecht auf der Richtung der Geschwindigkeit des Schwerpunkts. Die der Gleichung $k+V=0$ oder $\frac{k}{f}l + a' = 0$ entsprechende Ebene geht auf der hintern Seite der Begränzungsebene im Abstande $\frac{k}{f}l$ mit ihr parallel. Ist die Geschwindigkeit f des Schwerpunkts größer als k, so wird die Kugel von der parallelen Ebene geschnitten, und die in den Gleichungen (O) und (Q) enthaltenen Integral-Ausdrücke dürfen sich nur auf die vor ihr befindlichen Theile der Oberfläche erstrecken, wodurch

die Gränzen dieser Integrale von der Geschwindigkeit des Schwerpunkts abhängig und mit der Zeit veränderlich werden. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, wird man annehmen, daß dieselbe Geschwindigkeit schon von Anfange an kleiner als k sey, so daß die genannten Integrale während der ganzen Dauer der Bewegung die gesamte Oberfläche des Geschosses zu umfassen haben.

Nennt man ζ den Winkel, den die Richtung der fortschreitenden Geschwindigkeit f des Geschosses mit der Normalen MN oder dem Halbmesser GM einschließt (§ 11), und W die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des Punktes M, so ist, da bei der Kugel, deren Schwerpunkt und Mittelpunkt zusammenfallen, die letztere Geschwindigkeit in die berührende Ebene dieses Punktes fällt und somit zur normalen Geschwindigkeit nichts beiträgt, $V = f\cos\zeta$, woraus $\cos\zeta = \frac{a'}{l} = \frac{x'x_1 + y'y_1 + z'z_1}{fl}$ folgt, die berührende Geschwindigkeit V' aber ist zusammengesetzt aus W und der in die berührende Ebene fallenden zweiten Componente von f, nämlich $f\sin\zeta$.

Die Geschwindigkeit W ist $= \sqrt{(qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2}$, die Cosinus der Winkel, die ihre Richtung mit den Parallelen Mx, My, Mz macht, sind

$$\frac{qz_1 - ry_1}{W}, \quad \frac{rx_1 - pz_1}{W}, \quad \frac{py_1 - qx_1}{W},$$

und die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit $f\sin\zeta$ mit diesen Parallelen bildet, finden sich

$$\frac{x'}{f\sin\zeta} - \cos\lambda\,\mathrm{cotg}\,\zeta, \quad \frac{y'}{f\sin\zeta} - \cos\mu\,\mathrm{cotg}\,\zeta, \quad \frac{z'}{f\sin\zeta} - \cos\nu\,\mathrm{cotg}\,\zeta;$$

folglich ist der Cosinus des in der berührenden Ebene liegenden Winkels, den die Geschwindigkeit $f\sin\zeta$ mit der Geschwindigkeit W macht,

$$= \frac{x'(qz_1 - ry_1) + y'(rx_1 - pz_1) + z'(py_1 - qx_1)}{W f \sin\zeta}$$

und V'^2, in Übereinstimmung mit § 59,

$$= f^2\sin^2\zeta + W^2 + 2\,\frac{x'(qz_1 - ry_1) + y'(rx_1 - pz_1) + z'(py_1 - qx_1)}{W f\sin\zeta}\,W f\sin\zeta.$$

Man bemerke, daß durch die berührende Geschwindigkeit V', welche nicht negativ werden und nur an einzelnen Punkten der Oberfläche verschwinden

kann, keine ähnliche Unterbrechung der Stetigkeit der Integral-Functionen in den Gleichungen (O) und (Q), wie durch den Factor $k + V$, eintreten kann. (*)

(*) Um die Punkte der Kugeloberfläche, an welchen V verschwindet, zu bestimmen, nehme man die Achsen Gx, Gy, Gz, deren Lage gänzlich unbestimmt ist, und, so lange sie nicht mit der Masse des Körpers in Beziehung treten, nicht als Hauptachsen gedacht werden müssen, so daß die Masse im Innern der Kugel wie immer vertheilt seyn kann, für den Augenblick, auf welchen die Geschwindigkeit V des Punktes M sich bezieht, so an, daß die Achse der z mit der augenblicklichen Rotations-Achse, und die Halbachse Gy mit der Projection der Richtungslinie Ga' der Geschwindigkeit des Mittelpunkts auf die Ebene der x und y zusammenfällt; die Halbachse Gx befinde sich in dieser Ebene nach Maßgabe der Richtung der Umdrehung des Geschosses auf derjenigen Seite der Halbachse Gy, welche die Winkelgeschwindigkeit r der Umdrehung um die Achse der z positiv gibt (§5), und die Halbachse Gz werde so gewählt, daß der Winkel $a'Gz$, den die Richtungslinie Ga' mit ihr bildet, und welcher ξ heiße, spitz oder höchstens ein rechter ist. Zur Abkürzung werde die Verhältnißzahl $\frac{rl}{f}$, in welcher rl die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des Umfanges des auf der Achse der z senkrechten größten Kreises bedeutet, mit ρ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$p = q = 0,\quad x' = 0,\quad y' = f\sin\xi,\quad z' = f\cos\xi,\quad W = r\sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$
$$V^2 = f^2\sin^2\zeta + W^2 + 2rf x_1 \sin\xi;$$

für den Winkel ζ aber hat man

$$\cos\zeta = \frac{y_1}{l}\sin\xi + \frac{z_1}{l}\cos\xi, \text{ und somit } \sin^2\zeta = 1 - \left(\frac{y_1\sin\xi + z_1\cos\xi}{l}\right)^2.$$

Soll nun $V = 0$ werden, so wird, weil der Ausdruck $P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$, wenn nicht P und Q gleich Null sind, nur dadurch zu Null werden kann, daß zugleich $P = Q$ und der Winkel $\alpha = 180°$ wird, hiezu erfordert, daß

$$1)\ f\sin\zeta = r\sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$
$$2)\ x\sin\xi = -\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sin\zeta$$

seyn, wozu noch

$$3)\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l^2 = 0,$$ die Gleichung für die Kugeloberfläche, kommt.

Aus 1) und 2) folgt

$$4)\ x_1^2 + y_1^2 + x_1\frac{l}{\rho}\sin\xi = 0,$$

und aus 1) in Verbindung mit 3) wird, indem man quadrirt und den obigen Ausdruck für $\sin^2\zeta$ einführt,

$$5)\ \sin^2\xi\cdot y_1^2 + 2\sin\xi\cos\xi\cdot y_1 z_1 + (\cos^2\xi - \rho^2)\,z_1^2 - (1-\rho^2)\,l^2 = 0.$$

§ 61.

Die angezeigten Integrale in den Gleichungen (O) und (A) sind den Voraussetzungen des vorigen § gemäß in der ganzen Ausdehnung der Kugeloberfläche zu nehmen, und dabei diejenigen von der Zeit abhängigen Größen, welche in Bezug auf alle Theile dieser Fläche dieselben Werthe haben, als beständig zu betrachten. Zur Vereinfachung jener Integrale trägt sehr wesentlich die Eigenthümlichkeit der Kugeloberfläche bei, vermöge welcher jedes Element derselben, das die Coordinaten x, y, z hat, andere Elemente, deren Coordinaten bei gleichen absoluten

An die Stelle der Gleichungen 1), 2), 3) treten die Bedingungsgleichungen 3), 4), 5), und da drei Gleichungen zugleich Genüge geschehen muß, so folgt, daß die berührende Geschwindigkeit V nur an einzelnen Punkten der Kugeloberfläche verschwinden kann, welche durch den Durchschnitt dieser Fläche mit der Oberfläche zweier weiteren Körper bestimmt werden.

Die Gleichung 4) ist die Gleichung eines auf der Ebene der x und y senkrecht stehenden Cylinders mit kreisförmiger Grundfläche, welche den Durchmesser $\frac{l}{\varrho}\sin\xi$ hat, und deren Mittelpunkt im negativen Theil der Achse der x, um den Halbmesser $\frac{l}{2\varrho}\sin\xi$ von der Achse der y entfernt, liegt.

Die Gleichung 5) gehört zu einem auf der Ebene der y und z senkrecht stehenden Cylinder, dessen Grundfläche eine Hyperbel ist. Man lege in dieser Ebene durch den Mittelpunkt G ein Paar rechtwinkeliger Achsen für neue Coordinaten t und u, so daß der positive Theil der Achse der t zwischen den positiven Theilen der Achsen der z und y, und der positive Theil der Achse der u zwischen dem positiven Theil der Achse der y und dem negativen der Achse der z liegt, und daß die Tangente des spitzen Winkels, den die Achse der t mit der Achse der z bildet, $= \frac{\sin 2\xi}{R + \cos 2\xi - \varrho^2}$, wo R die Wurzelgröße $+\sqrt{1 - 2\varrho^2 \cos 2\xi + \varrho^4}$ bedeutet, ist. Dadurch geht die Gleichung 5) über

$$\text{in } \frac{R+1-\varrho^2}{2(1-\varrho^2)l^2}\,t^2 - \frac{R-(1-\varrho^2)}{2(1-\varrho^2)l^2}\,u^2 = 1, \qquad \text{wenn } \varrho < 1,$$

$$\text{in } t^2 = u^2 \qquad \text{wenn } \varrho = 1,$$

$$\text{in } \frac{R+\varrho^2-1}{2(\varrho^2-1)l^2}\,u^2 - \frac{R-(\varrho^2-1)}{2(\varrho^2-1)l^2}\,t^2 = 1, \qquad \text{wenn } \varrho > 1 \text{ ist.}$$

Die Querachse der Hyperbel fällt sonach in die Achse der t, und ist $= 2l\sqrt{\frac{2(1-\varrho^2)}{R+1-\varrho^2}}$, wenn $\varrho < 1$, sie fällt dagegen in die Achse der u und ist $= 2l\sqrt{\frac{2(\varrho^2-1)}{R+\varrho^2-1}}$, wenn $\varrho > 1$; die zugeordnete Achse ist in jenem Falle $= 2l\sqrt{\frac{2(1-\varrho^2)}{R-(1-\varrho^2)}}$, in diesem $= 2l\sqrt{\frac{2(\varrho^2-1)}{R-(\varrho^2-1)}}$.

Im Allgemeinen werden sich daher vier Punkte auf der Oberfläche der

Werthen entweder alle negativ, oder theils positiv theils negativ sind, entsprechen, wodurch die Integrale von der Form $\int x_1^k y_1^m z_1^n d\omega$, wenn nur einer der genannten k, m, n eine ungerade Zahl ist, indem man sie auf die ganze Oberfläche ausdehnt, verschwinden, wie man ebenfalls durch Anwendung der Polar-Coordinaten (§ 11) findet.

Kugel befinden, in welchen $V' = 0$ ist. Setzt man vermöge der Gleichung 4) $y_1^2 = -\frac{l}{\varrho}\sin\xi . x_1 - x_1^2$, und vermöge 3) und 4) $z_1^2 = l^2 + \frac{l}{\varrho}\sin\xi . x_1$, so ergibt sich aus 5) die Eliminations-Gleichung:

$$6)\ x_1^4 + 2\frac{1+\varrho^2}{\varrho\sin\xi} l x_1^3 + \left(2+\left(\frac{1+\varrho^2}{\varrho\sin\xi}\right)^2\right) l^2 x_1^2 + 2\frac{1+\varrho^2}{\varrho\sin\xi} l^3 x_1 + l^4 = 0, \text{ d. i. } \left(x_1^2 + \frac{1+\varrho^2}{\varrho\sin\xi} l x_1 + l^2\right)^2 = 0,$$

woraus für x_1 die zwei Werthe $-l\frac{1+\varrho^2 \pm R_1}{2\varrho\sin\xi}$, wenn $R_1 = +\sqrt{1+2\varrho^2\cos 2\xi + \varrho^4}$ ist, folgen.

Von diesen beiden Werthen entspricht, weil $\frac{1+\varrho^2}{2\varrho\sin\xi}$, und um so mehr $\frac{1+\varrho^2+R_1}{2\varrho\sin\xi}$, größer als 1 ist, (vermöge der Gleichung 3)) nur der mit dem untern Zeichen den gegebenen Bedingungen, und zu ihm gehören

$$y_1^2 = l^2\frac{(1+\varrho^2-R_1)^2(1-\varrho^2+R_1)}{8\varrho^4\sin^2\xi}, \qquad z_1^2 = l^2 \cdot \frac{R_1-1+\varrho^2}{2\varrho^2}.$$

Man hat daher für $V' = 0$ folgende vier Gruppen zusammengehöriger Coordinatenwerthe:

$$x_1 = -l\cdot\frac{1+\varrho^2-R_1}{2\varrho\sin\xi}, \quad y_1 = \pm l\cdot\frac{1+\varrho^2-R_1}{2\varrho\sin\xi}\sqrt{\frac{R_1+1-\varrho^2}{2\varrho^2}}, \quad z_1 = \pm l\sqrt{\frac{R_1-1+\varrho^2}{2\varrho^2}},$$

indem jeder der beiden Werthe von y_1 mit jedem der beiden Werthe von z_1 sich verbinden läßt.

Alle diese Werthe sind kleiner als l, und, da die Größen unter den Wurzelzeichen nothwendig positiv sind, immer möglich. Die Kugel hat daher, ϱ mag kleiner oder größer als 1 oder gleich 1 seyn, im Allgemeinen immer vier, aber nicht mehr, Punkte, an welchen die berührende Geschwindigkeit verschwindet oder kein Widerstand durch Reibung Statt findet, und denkt man sie sich in irgend einem Augenblicke ihrer Bewegung durch den größten Kreis, in dem sowohl die Rotations-Achse als auch die Richtungslinie Ga' der Geschwindigkeit des Mittelpunkts liegt, in zwei Hälften geschieden, so befinden sich diese vier Punkte sämmtlich in derjenigen Halbkugel, gegen welche die Drehungsbewegung des in die letztere Linie fallenden Halbmessers der Kugel in dem genannten Augenblicke gerichtet ist.

Folgende besondere Fälle sind zu bemerken:

Wenn der Winkel $\xi = 0$ ist oder die Umdrehungsachse und die Richtungslinie Ga' zusammenfallen, so wird

Vermöge der Gleichungen (1) des § 59 hat man

$$\int(k+V)V'\cos\lambda'\,d\omega = k\int u\,d\omega + \int uV\,d\omega - k\int V\cos\lambda\,d\omega - \int V^2\cos\lambda\,d\omega,$$
$$\int(k+V)V'\cos\mu'\,d\omega = k\int v\,d\omega + \int vV\,d\omega - k\int V\cos\mu\,d\omega - \int V^2\cos\mu\,d\omega,$$
$$\int(k+V)V'\cos\nu'\,d\omega = k\int w\,d\omega + \int wV\,d\omega - k\int V\cos\nu\,d\omega - \int V^2\cos\nu\,d\omega.$$

Setzt man für V den Ausdruck (5) des § 60, und für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Ausdrücke (3) des § 59, so findet man, daß alle die Glieder, in welche die Producte $V^2\cos\lambda$, $V^2\cos\mu$, $V^2\cos\nu$ zerfallen, wenigstens eine der Coordinaten x, y, z, in der ersten Potenz enthalten, und daß somit

$$\int V^2\cos\lambda\,d\omega = \int V^2\cos\mu\,d\omega = \int V^2\cos\nu\,d\omega = 0$$

ist, daß dagegen $\int V\cos\lambda\,d\omega$, indem man die gleichfalls verschwindenden Glieder dieses Integrals wegläßt, übergeht

$$\text{in } \frac{\alpha x'}{l^2}\int x_1^2\,d\omega + \frac{\beta y'}{l^2}\int y_1^2\,d\omega + \frac{\gamma z'}{l^2}\int z_1^2\,d\omega,$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \pm l,$$

oder nur an den Endpunkten der Drehachse ist $V' = 0$.

Wenn $\xi = 90°$ ist, oder diese Achse und die Linie Ga' winkelrecht auf einander stehen, so hat man

$$\text{für } \rho < 1, \quad x_1 = -\rho l, \quad y_1 = \pm l\sqrt{1-\rho^2}, \quad z_1 = 0,$$
$$\text{für } \rho > 1, \quad x_1 = -\frac{l}{\rho}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \pm \frac{l\sqrt{\rho^2-1}}{\rho}.$$

Ist $\rho = 0$, oder findet gar keine Umdrehung Statt, so fällt die Bedingungsgleichung 2) heraus, und aus der Gleichung 1) ergibt sich $\zeta = 0$ und $180°$, oder an den beiden Punkten, wo die Richtungslinie des Mittelpunkts die Oberfläche der Kugel schneidet, ist $V' = 0$.

Ist $\rho = \frac{1}{0}$, oder rotirt die Kugel nur, ohne weitere Bewegung, so hat man wie für $\xi = 0$,

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \pm l.$$

Für $\rho = 1$ findet sich

$$x_1 = -l.\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\xi, \quad y_1 = \pm l.\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\xi\sqrt{\cos\xi}, \quad z_1 = \pm l\sqrt{\cos\xi}.$$

In den Fällen, wenn der Winkel $\xi = 0$ oder $= 90°$, und wenn $\rho = 0$ oder $\frac{1}{0}$ ist, ist daher V' nur an zwei Punkten gleich Null; und wenn $\xi = 90°$ und zugleich $\rho = 1$ ist, findet nur ein einziger solcher Punkt Statt, an welchem diese Geschwindigkeit verschwindet. Ein Fall aber, in welchem dieses Verschwinden überhaupt nicht möglich wäre, ist nicht vorhanden.

oder, weil $\int(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\partial\omega = 4\pi l^2$ und $\int x_1^2\partial\omega = \int y_1^2\partial\omega = \int z_1^2\partial\omega = \frac{4\pi l^2}{3}$ ist,

in $\frac{4\pi l^2}{3}(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')$, d. i. in $\frac{4\pi l^2}{3}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}$.

Man hat daher

$$\int V\cos\lambda\,\partial\omega = \frac{4\pi l^2}{3}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},\ \text{und eben so}\ \int V\cos\mu\,\partial\omega = \frac{4\pi l^2}{3}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},\ \int V\cos\nu\,\partial\omega = \frac{4\pi l^2}{3}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich durch Anwendung der Ausdrücke (1) des § 59 für u, v, w

$$\int u\,\partial\omega = 4\pi l^2\cdot\frac{\partial x}{\partial t},\qquad \int v\,\partial\omega = 4\pi l^2\cdot\frac{\partial y}{\partial t},\qquad \int w\,\partial\omega = 4\pi l^2\cdot\frac{\partial z}{\partial t};$$

desgleichen

$$\int uV\partial\omega = \frac{4\pi l^3}{3}\big(p(\gamma y'-\beta z')+q(\alpha z'-\gamma x')+r(\beta x'-\alpha y')\big),$$
$$\int vV\partial\omega = \frac{4\pi l^3}{3}\big(p(\gamma' y'-\beta' z')+q(\alpha' z'-\gamma' x')+r(\beta' x'-\alpha' y')\big),$$
$$\int wV\partial\omega = \frac{4\pi l^3}{3}\big(p(\gamma'' y'-\beta'' z')+q(\alpha'' z'-\gamma'' x')+r(\beta'' x'-\alpha'' y')\big).$$

Weil aber

$$x' = \alpha\frac{\partial x}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial y}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial z}{\partial t},$$
$$y' = \beta\frac{\partial x}{\partial t}+\beta'\frac{\partial y}{\partial t}+\beta''\frac{\partial z}{\partial t},$$
$$z' = \gamma\frac{\partial x}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial z}{\partial t}$$

ist, so hat man

$$\beta x'-\alpha y' = (\beta\alpha'-\alpha\beta')\frac{\partial y}{\partial t}+(\beta\alpha''-\alpha\beta'')\frac{\partial z}{\partial t},$$
$$\alpha z'-\gamma x' = (\alpha\gamma'-\gamma\alpha')\frac{\partial y}{\partial t}+(\alpha\gamma''-\gamma\alpha'')\frac{\partial z}{\partial t},$$
$$\gamma y'-\beta z' = (\gamma\beta'-\beta\gamma')\frac{\partial y}{\partial t}+(\gamma\beta''-\beta\gamma'')\frac{\partial z}{\partial t},$$
$$\beta' x'-\alpha' y' = (\beta'\alpha''-\alpha'\beta'')\frac{\partial z}{\partial t}+(\beta'\alpha-\alpha'\beta)\frac{\partial x}{\partial t},$$
$$\alpha' z'-\gamma' x' = (\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha'')\frac{\partial z}{\partial t}+(\alpha'\gamma-\gamma'\alpha)\frac{\partial x}{\partial t},$$
$$\gamma' y'-\beta' z' = (\gamma'\beta''-\beta'\gamma'')\frac{\partial z}{\partial t}+(\gamma'\beta-\beta'\gamma)\frac{\partial x}{\partial t},$$
$$\beta'' x'-\alpha'' y' = (\beta''\alpha-\alpha''\beta)\frac{\partial x}{\partial t}+(\beta''\alpha'-\alpha''\beta')\frac{\partial y}{\partial t},$$
$$\alpha'' z'-\gamma'' x' = (\alpha''\gamma-\gamma''\alpha)\frac{\partial x}{\partial t}+(\alpha''\gamma'-\gamma''\alpha')\frac{\partial y}{\partial t},$$
$$\gamma'' y'-\beta'' z' = (\gamma''\beta-\beta''\gamma)\frac{\partial x}{\partial t}+(\gamma''\beta'-\beta''\gamma')\frac{\partial y}{\partial t};$$

und weil ferner (*)

$$\alpha = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', \qquad \beta = \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', \qquad \gamma = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta',$$
$$\alpha' = \beta''\gamma - \beta\gamma'', \qquad \beta' = \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', \qquad \gamma' = \alpha''\beta - \alpha\beta'',$$
$$\alpha'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma, \qquad \beta'' = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, \qquad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'$$

ist, so findet sich vermittelst dieser Beziehungen

$$\int x V d\omega = \frac{4\pi l^5}{3} P, \quad \int y V d\omega = \frac{4\pi l^5}{3} Q, \quad \int z V d\omega = \frac{4\pi l^5}{3} R,$$

indem man

$$P = p\left(\alpha'\frac{\partial z}{\partial t} - \alpha''\frac{\partial y}{\partial t}\right) + q\left(\beta'\frac{\partial z}{\partial t} - \beta''\frac{\partial y}{\partial t}\right) + r\left(\gamma'\frac{\partial z}{\partial t} - \gamma''\frac{\partial y}{\partial t}\right),$$
$$Q = p\left(\alpha''\frac{\partial x}{\partial t} - \alpha\frac{\partial z}{\partial t}\right) + q\left(\beta''\frac{\partial x}{\partial t} - \beta\frac{\partial z}{\partial t}\right) + r\left(\gamma''\frac{\partial x}{\partial t} - \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right),$$
$$R = p\left(\alpha\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha'\frac{\partial x}{\partial t}\right) + q\left(\beta\frac{\partial y}{\partial t} - \beta'\frac{\partial x}{\partial t}\right) + r\left(\gamma\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma'\frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

nimmt.

(*) Aus den beiden Gleichungen:

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0,$$
$$\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0,$$

welche zwischen den Cosinus α, β, γ etc. der die gegenseitige Lage der beiden Systeme der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 bestimmenden Winkel $x_1 Gx$, $y_1 Gx$, $z_1 Gx$ etc. Statt finden, folgt:

$$\frac{\alpha}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'} = \frac{\alpha'}{\beta''\gamma - \beta\gamma''} = \frac{\alpha''}{\beta\gamma' - \beta'\gamma},$$

und, indem man damit die Gleichung $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$ in Verbindung bringt,

$$\alpha^2 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 \text{ oder } \alpha = \pm(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma').$$

Läßt man die Achse Gz_1 mit der Achse Gz, und somit die Ebene der x_1 und y_1 mit der Ebene der x und y zusammenfallen, so sind β'' (d. i. $\cos y_1 Gz$) und γ' (d. i. $\cos z_1 Gy$) gleich Null, und γ'' (d. i. $\cos z_1 Gz$) $= 1$, daher α (d. i. $\cos x_1 Gx$) $= \pm\beta' = \pm\cos y_1 Gy$, und man hat das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, also auch α entweder $= \beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$ oder $= \beta''\gamma' - \beta'\gamma''$ zu setzen, je nachdem der rechte Winkel zwischen Gx_1 und Gy_1 in der Ebene der x_1 und y_1 nach derselben Seite von Gx_1 aus, wie der rechte Winkel zwischen Gx und Gy in der Ebene der x und y von Gx aus, genommen ist, oder nach der entgegengesetzten Seite.

Nach den Festsetzungen des § 13 in Bezug auf die Winkel ψ, φ, θ findet hier der erstere Fall Statt, daher ist hier $\alpha = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$, und somit $\alpha' = \beta''\gamma - \beta\gamma''$, $\alpha'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma$, eben deshalb aber auch $\beta = \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'$, $\gamma = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$ etc. zu setzen.

Alle diese verschiedenen Theile der angedeuteten Integrale der Gleichungen (C) geben zusammen

$$\int (k+V)\, V' \cos\lambda'\, \partial\omega = \frac{8\pi l^2}{3}\left(k\frac{\partial x}{\partial t} + \tfrac{1}{2} l P\right),$$
$$\int (k+V)\, V' \cos\mu'\, \partial\omega = \frac{8\pi l^2}{3}\left(k\frac{\partial y}{\partial t} + \tfrac{1}{2} l Q\right),$$
$$\int (k+V)\, V' \cos\nu'\, \partial\omega = \frac{8\pi l^2}{3}\left(k\frac{\partial z}{\partial t} + \tfrac{1}{2} l R\right).$$

Die angezeigten Integrale der Gleichungen (C') gehen durch die Werthe (4) von $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ (§60) zunächst auf

$$\int (k+V)(z_1 v_1 - y_1 w_1)\,\partial\omega$$
$$\int (k+V)(x_1 w_1 - z_1 u_1)\,\partial\omega$$
$$\int (k+V)(y_1 u_1 - x_1 v_1)\,\partial\omega$$

zurück. Setzt man nun für u_1, v_1, w_1 die Ausdrücke (2) des §59, und für V den Ausdruck (5) des §60, so verschwinden theils die Glieder, in welche die Integrale zerfallen, dadurch, daß sie eine oder mehrere der Coordinaten x_1, y_1, z_1 in ungeraden Potenzen enthalten, theils heben sich diese Glieder gegenseitig auf, und man erhält

$$\int (z_1 v_1 - y_1 w_1)\,\partial\omega = -\frac{8\pi l^4}{3}\, p,$$
$$\int (x_1 w_1 - z_1 u_1)\,\partial\omega = -\frac{8\pi l^4}{3}\, q,$$
$$\int (y_1 u_1 - x_1 v_1)\,\partial\omega = -\frac{8\pi l^4}{3}\, r,$$
$$\int (z_1 v_1 - y_1 w_1)\, V\partial\omega = \int (x_1 w_1 - z_1 u_1)\, V\partial\omega = \int (y_1 u_1 - x_1 v_1)\, V\partial\omega = 0,$$

und somit

$$\int (k+V)(z_1 \cos\mu_1' - y_1 \cos\nu_1')\, V'\partial\omega = -\tfrac{8}{3}\pi k l^4.\, p,$$
$$\int (k+V)(x_1 \cos\nu_1' - z_1 \cos\lambda_1')\, V'\partial\omega = -\tfrac{8}{3}\pi k l^4.\, q,$$
$$\int (k+V)(y_1 \cos\lambda_1' - x_1 \cos\mu_1')\, V'\partial\omega = -\tfrac{8}{3}\pi k l^4.\, r.$$

§62.

Betrachtet man das Geschoß als eine Hohlkugel, deren kugelförmige, mit der äußeren Oberfläche concentrische, Aushöhlung den Halbmesser l_1

Durch Festsetzung der Lage irgend zweier zu den beiden Systemen gehöriger Achsenpaare in Beziehung auf einander wird diese gegenseitige Lage für je zwei auf einander bezogene Achsenpaare derselben Systeme ohne Zweideutigkeit bestimmt.

hat, und deren (in Gewichtseinheiten anzugebende) mittlere Dichtigkeit $\mathfrak{D}_1$ ist, so hat man $M = \frac{4}{3}\pi\mathfrak{D}_1(l^3 - l_1^3)$, und $\frac{8}{15}\pi\mathfrak{D}_1(l^5 - l_1^5)$ als gemeinschaftlichen Werth der (nach §160) unter sich gleichen Größen A, B, C.

Wird nunmehr zur Abkürzung

$$\frac{8\pi n'\mathfrak{D}l^2}{3M} \text{ oder } \frac{2n'\mathfrak{D}l^2}{\mathfrak{D}_1(l^3 - l_1^3)} = \mu_1\,,$$

$$\frac{8\pi n'\mathfrak{D}\kappa l^4}{3A} \text{ oder } \frac{5n'\mathfrak{D}\kappa l^2}{\mathfrak{D}_1(l^5 - l_1^5)} = \lambda$$

gesetzt, wonach $\frac{1}{\mu_1}$ eine Längengröße und λ eine abstracte Zahl bedeutet, und werden in den Gleichungen (O) noch die den normalen Widerstand vorstellenden Ausdrücke der Gleichungen (A_1) des §15, in welchen der Geschwindigkeits-Exponent i gleich 2 und μ in der Bedeutung von $\frac{n\mathfrak{D}\kappa l^2}{2M}$ (§23) zu nehmen sind, auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens angefügt, so stellen sich die Differential-Gleichungen (O) und (Q) in folgender Gestalt dar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\mu\frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} - \mu_1\left(k\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2}lP\right), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\mu\frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \mu_1\left(k\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2}lQ\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -g' - \mu\frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} - \mu_1\left(k\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}lR\right), \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (O_1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\lambda p, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda q, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = -\lambda r. \qquad (Q_1)$$

In den Gleichungen (Q) ist kein auf den normalen Widerstand bezughabendes Glied beizusetzen, indem die zur rechten Seite stehenden Glieder der Gleichungen (B_1) des §15 mit dem Zusammenfallen des Schwerpunkts und Mittelpunkts der Kugel verschwinden.

§163.

Die Gleichungen (Q_1) geben durch Integration, indem man die Anfangswerthe der Winkelgeschwindigkeiten p, q, r mit a, b, c bezeichnet,

$$p = ae^{-\lambda t}, \quad q = be^{-\lambda t}, \quad r = ce^{-\lambda t},$$

wo e wieder die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung des Geschosses um die augenblickliche Rotations-Achse ist hiernach (§19)

$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot e^{-\lambda t},$$

und die Winkel, welche diese Achse mit den Hauptachsen Gx, Gy, Gz bildet, sind beständig, woraus folgt, daß, obgleich die Umdrehungsgeschwindigkeit des Geschosses, und ihre auf die Hauptachsen Bezug habenden Theile p, q, r veränderlich sind, die Umdrehung dennoch stets und in gleicher Richtung um denselben Durchmesser, nämlich denjenigen, um welchen sie beim Anfange der Bewegung Statt hat, erfolgt. Nimt man, da die Hauptachsen willkührlich gewählt werden können, die Umdrehungsachse zur Achse der z, so ist $a = b = 0$, daher für die ganze Dauer der Bewegung $p = q = 0$, und die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung gleich r.

Weil aber die Umdrehungsachse immer dieselbe gerade Linie im Innern des Körpers ist oder durch dieselben Punkte seiner Oberfläche geht, so bleibt sich diese Achse auch, während der Körper im Raume sich fortbewegt, stets parallel, wie aus den Gleichungen am Ende des §13 folgt. Wir haben für $p = q = 0$

$$\sin\theta\sin\varphi\, d\psi = \cos\varphi\, d\theta, \qquad \sin\theta\cos\varphi\, d\psi = -\sin\varphi\, d\theta.$$

Multiplicirt man abwechselnd die eine der letzteren Gleichungen mit $\sin\varphi$, die andere mit $\cos\varphi$, addirt sie dann und zieht sie von einander ab, so verwandeln sie sich in

$$d\theta = 0, \quad \text{und} \quad \sin\theta\, d\psi = 0,$$

wonach die Winkel θ und ψ, welche die Lage des die Achsen der x, und y enthaltenden Durchschnitts des Körpers gegen die den festen Achsen gleichlaufenden Geraden Gx, Gy und Gz bestimmen, beständig seyn müssen. Dieser Durchschnitt, und eben so die auf ihn senkrechte Achse der z, werden sich daher während der ganzen Dauer der Bewegung parallel bleiben. (*)

Wird nunmehr (§23) derjenige Halbmesser des Geschosses, welcher im Anfange der Bewegung mit dem im Aufsteigen von der untern nach der

(*) Die Umdrehungsgeschwindigkeit kann somit veränderlich, und die Lage der Umdrehungsachse, sowohl in Beziehung auf den Raum, als im Innern des Körpers, dennoch beständig seyn, gegen P. Méc. II. no 406.

obern Seite der horizontalen Ebene xGy begriffenen Theil des Durchschnitts dieser Ebene mit der Ebene x_1Gy_1 zusammenfiel, zur Halbaxe Gx_1, welche man beliebig wählen kann, genommen, so wird, da die Rotation um die Achse der z_1 hiernach von Gx_1 aus in der Richtung gegen die, anfänglich oberhalb der Ebene xGy liegende, Achse Gy_1 Statt hat, dadurch die Winkelgeschwindigkeit c positiv, und der Winkel φ, indem man ihn von dem genannten Durchschnittstheile aus rechnet, gleich Null für $t=0$. Eben dadurch wird zugleich bestimmt, bis zu welchem Theile der Durchschnittslinie der beiden Ebenen x_1Gy_1 und xGy der von der Parallelen Gx aus nach der rechten Seite sich erstreckende Winkel ψ (313) zu rechnen, so wie, welcher der beiden Nebenwinkel, die diese Ebenen mit einander bilden, für den dem Winkel θ gleichen Flächenwinkel zwischen den beiden ebenen Winkeln xGz und x_1Gz_1, oder welcher der beiden Theile der Achse der z_1 für die Halbaxe Gz_1 zu nehmen ist. Diese Halbaxe wird über oder unter die Horizontal=Ebene xGy fallen, je nachdem der Winkel θ spitz oder stumpf ist. Ist der Winkel θ ein rechter, so fällt die Umdrehungsachse selbst in diese Horizontal=Ebene; und steht sie in diesem Falle senkrecht auf der Vertikal=Ebene xGz, in welcher die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts sich befindet, so ist der Winkel $\psi = 0$ oder $= 180°$, je nachdem die vorderen Theile des Geschosses bei der Umdrehung von unten nach oben oder von oben nach unten sich bewegen; liegt aber die Umdrehungsachse in der Vertikal=Ebene xGz oder fällt sie mit der Parallelen Gx zusammen, so ist ψ entweder $= 90°$ oder $270°$, je nachdem die obern Theile des Geschosses sich von der rechten gegen die linke oder von der linken gegen die rechte Seite drehen. Ist ferner die Umdrehungsachse vertikal, oder fällt die Ebene x_1Gy_1 mit der Ebene xGy zusammen, so ist die Durchschnittslinie beider Ebenen unbestimmt. Wird in diesem Falle, was Sache der Willkühr ist, der Winkel φ von dem negativen Theile der Achse der y aus gerechnet, und derjenige Halbmesser des Geschosses, welcher beim Anfange der Bewegung mit diesem Theile zusammenfiel, zur Halbaxe Gx_1 genommen, so hat man, damit c ebenfalls positiv sey, zur Halbaxe Gy_1, wenn die vorderen Theile des Geschosses von der rechten gegen die linke Seite sich drehen, den beim Anfange der Bewegung in die Parallele Gx auf der vordern Seite, bei der entgegengesetzten

Richtung der Umdrehung aber den in die Verlängerung dieser Linie auf der hinteren Seite fallenden Halbmesser zu nehmen, und der Winkel θ wird bei der erstern Richtung gleich Null, bei der letztern gleich 180°.

Die letzte der Gleichungen am Ende des §13 wird, indem man $d\psi = 0$ und für r den oben gefundenen Ausdruck setzt,

$$\frac{d\varphi}{dt} = ce^{-\lambda t},$$

und liefert durch Integration, da der vorigen Annahme gemäß $\varphi = 0$ ist für $t = 0$,

$$\varphi = \frac{c}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Die Winkelgeschwindigkeit r nimmt in gleichen Zeittheilen nach einer geometrischen Progression ab, der veränderliche Winkel φ aber wird fortdauernd größer, und die Gränze, welche er nie ganz erreichen kann, ist $\frac{c}{\lambda}$.

Die Factoren P, Q, R in den Gleichungen (O) vereinfachen sich durch $p = q = 0$ auf

$$P = r\left(\gamma'\frac{dz}{dt} - \gamma''\frac{dy}{dt}\right), \qquad Q = r\left(\gamma''\frac{dx}{dt} - \gamma\frac{dz}{dt}\right), \qquad R = r\left(\gamma\frac{dy}{dt} - \gamma'\frac{dx}{dt}\right),$$

und nach §13 hat man ferner

$$\gamma = -\sin\theta\sin\psi, \qquad \gamma' = -\sin\theta\cos\psi, \qquad \gamma'' = \cos\theta,$$

welche letztern Größen demnach von der Zeit t und dem Winkel φ unabhängig sind, wie dieses seyn muß, weil die Winkel, deren Cosinus sie ausdrücken, sich immer gleich bleiben.

Die Gleichungen (O) für die fortschreitende Bewegung des Geschosses, welche noch ferner zu untersuchen sind, gehen hierdurch in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -\left(\mu\frac{ds}{dt} + \mu_1 k\right)\frac{dx}{dt} + \tfrac{1}{2}\mu_1 c l e^{-\lambda t}\left(\sin\theta\cos\psi\frac{dz}{dt} + \cos\theta\frac{dy}{dt}\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -\left(\mu\frac{ds}{dt} + \mu_1 k\right)\frac{dy}{dt} - \tfrac{1}{2}\mu_1 c l e^{-\lambda t}\left(\sin\theta\sin\psi\frac{dz}{dt} + \cos\theta\frac{dx}{dt}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} + g &= -\left(\mu\frac{ds}{dt} + \mu_1 k\right)\frac{dz}{dt} + \tfrac{1}{2}\mu_1 c l e^{-\lambda t}\left(\sin\theta\sin\psi\frac{dy}{dt} - \sin\theta\cos\psi\frac{dx}{dt}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (O_1)$$

§64.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (O_1) mit $\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy}{dt}$, die dritte mit $\frac{dz}{dt}$, und addirt die Producte, so heben sich die Glieder, welche den Factor cl enthalten, gegenseitig auf, und man erhält

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + g'\frac{\partial z}{\partial s} = -\mu\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \mu_1 k\frac{\partial s}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (R)$$

Die beiden Glieder rechts vom Gleichheitszeichen der letzteren Gleichung stellen den Gesammt-Widerstand vor, den die Luft einer ohne Umdrehung in ihr sich bewegenden Kugel von der in 160 vorausgesetzten Beschaffenheit entgegensetzt, und zwar das erste Glied den normalen, das zweite den durch die Reibung der Lufttheilchen an der Oberfläche der nicht rotirenden Kugel entstehenden Widerstand. Die Richtung beider Widerstände ist der Richtung der Bewegung des Mittelpunkts gerade entgegengesetzt, und fällt in die Berührende seiner Bahn.

Das zweite, die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ in der ersten Potenz enthaltende, Glied kann bei sehr kleinen Geschwindigkeiten, z. B. bei sehr kleinen Schwingungen eines Pendels, wobei die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers nicht einmal den hundertsten Theil eines Meters in der Sekunde beträgt, vor dem, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen, ersten Gliede überwiegend werden. Dagegen scheint aus den Versuchen, welche man über den Widerstand der Luft angestellt hat, hervorzugehen, daß das zweite Glied gegen das erste unmerklich wird, sobald die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ nicht mehr ganz unbedeutend ist, woraus sich dann weiter schließen läßt, daß der Factor μ_1 gegen μ, und somit der Coefficient κ' gegen κ, nur sehr geringe Werthe haben können.

Diejenigen Glieder der Gleichungen (O_4), welche cl, die anfängliche lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des Umfanges des auf der Umdrehungsachse senkrechten größten Kreises der Kugel, als Factor enthalten, drücken die den Achsen der x, y und z parallelen Theile der dem Reibungswiderstande, so weit derselbe durch die Umdrehung entsteht, entsprechenden beschleunigenden Kraft aus, und da die Geschwindigkeit cl, wenn auch das Geschoß sich schnell dreht, gegen k immer nur klein seyn kann, so erhellet, daß aber diese Glieder im Verhältniß zu jenen, welche den Factor k enthalten, nur unbedeutende Werthe haben können. Zugleich zeigt die Gleichung (R), daß die fortschreitende Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ des Geschoßes und die Länge des Bogens s der Bahn, welche der Mittelpunkt beschreibt, nur in so fern von der Rotation abhängen, als durch sie die Richtung der Berührenden der Bahn gegen die Vertikale, und zugleich aber hierdurch der in die Berührende fallende Theil der Schwerkraft einige Änderung erleiden kann. Schon aus diesen Umständen läßt sich der Schluß ziehen, daß der

Einfluß, den die Umdrehung des Geschosses durch die Reibung der Luft auf die fortschreitende Bewegung desselben ausübt, nur sehr gering seyn kann.

Läßt man die Schwerkraft unbeachtet, so muß zwar die Bahn des Geschosses, welche man durch die Rechnung findet, eine von der Bahn, welche es wirklich beschreibt, sehr verschiedene seyn. Weil jedoch die Rotation von der Schwere des Geschosses, deren Richtung durch den Schwerpunkt geht, ganz unabhängig ist, und die letztere Kraft nur dadurch, daß sie eine der die Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung des Schwerpunkts bedingenden Ursachen ist, zu den Erfolge der Rotation in mittelbare Beziehung tritt, so muß sich auch, wenn die Rechnung die Schwerkraft nicht in Betracht zieht, aus ihr ergeben, ob und in wie fern die Umdrehung durch den Widerstand der Luftreibung irgend einen erheblichen Einfluß auf die Bahn des Geschosses haben kann. Man wird daher auch hier, wie es bereits in Beziehung auf die möglichen Veränderungen, welche die Rotation durch den normalen Widerstand gegen ein exzentrisches Geschoß hervorzubringen vermag, geschehen ist (126), bei den weitern Untersuchungen die Schwerkraft als nicht vorhanden voraussetzen, und das Glied g in den Gleichungen $(Q_{,,})$ und (R) außer Acht lassen.

§165.

Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung (R), daher auch die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ des Mittelpunkts, so wie der von ihm zurückgelegte Weg s, von der Umdrehung des Geschosses gänzlich unabhängig, und man erhält aus dieser Gleichung, indem man integrirt, die Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts mit f bezeichnet und s gleich Null annimmt für $t = 0$,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = f\, e^{-\mu s} \cdot e^{-\mu_1 k t},$$

woraus durch eine zweite Integration

$$e^{\mu s} = 1 + \frac{\mu f}{\mu_1 k}\left(1 - e^{-\mu_1 k t}\right), \qquad s = \frac{1}{\mu} \log\left(1 + \frac{\mu f}{\mu_1 k}\left(1 - e^{-\mu_1 k t}\right)\right),$$

und somit ferner

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{f\, e^{-\mu_1 k t}}{1 + \frac{\mu f}{\mu_1 k}\left(1 - e^{-\mu_1 k t}\right)}, \qquad \mu \frac{\partial s}{\partial t} + \mu_1 k = \frac{\mu_1 k + \mu f}{1 + \frac{\mu f}{\mu_1 k}\left(1 - e^{-\mu_1 k t}\right)}$$

sich ergibt.

Da, wenn die Schwerkraft außer Acht bleibt, die Lage der, nun außer

Beziehung mit der Richtung derselben stehenden, Achse der z willkührlich angenommen werden kann, so nehme man von jetzt an die Gerade, in welche im Anfange der Bewegung die Umdrehungsachse, die Achse der z_1, fällt, als die feste Achse der z, und denjenigen Theil derselben, welcher mit der Richtungslinie der Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts den kleineren Nebenwinkel bildet, als ihren positiven Theil, so wie die Projection dieser Richtungslinie auf die Ebene, welche im Anfangspunkt O des Mittelpunkts, dem Anfangspunkt der Coordinaten, auf der Achse der z senkrecht steht, und als Ebene der festen Achsen Ox und Oy an die Stelle der Horizontal-Ebene durch den letzteren Punkt tritt, als den positiven Theil der Achse der x an. Indem man ferner den positiven Theil der Achse der z (ob er gleich unter diese Horizontal-Ebene fallen kann,) als oberen Theil derselben betrachtet, und von ihm aus das Gesicht gegen dessen vordere Seite, nach der jene Richtungslinie sich erstreckt, gekehrt sich denkt, bestimme man, wie bei den Festsetzungen des §5 von Oz aus, die Achse Oy so, daß sie auf der linken Seite der Ebene der x und z liegt. Nach diesen Annahmen fällt die Ebene $x_1 G y_1$ mit der Ebene $x G y$ zusammen, oder steht die Umdrehungsachse senkrecht auf der letzteren Ebene, und vermöge der vorausgegangenen Annahmen des §63 ist der Winkel $\psi = 90°$, und der Winkel θ, wenn die vorderen Theile des Geschosses in der Richtung von der rechten gegen die linke Seite sich drehen, gleich Null, im Falle der entgegengesetzten Richtung aber gleich 180°, oder fällt anfänglich die Halbachse $G z_1$ in jenem Falle mit dem positiven, in diesem mit dem negativen Theile der Achse der z zusammen. Steht die Umdrehungsachse senkrecht auf der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunkts, so kann man willkührlich den über die Horizontal-Ebene des Anfangspunkts fallenden Theil derselben als positiven Theil der Achse der z nehmen, und eben so, wenn die Rotations-Achse mit jener Richtung zusammenfällt, der Achse der x jede beliebige Lage in der im Anfangspunkt darauf senkrechten Ebene geben.

Setzt man demgemäß $\psi = 90°$ und $\theta = 180°$, oder drehen sich die vorderen Theile des Geschosses von der linken nach der rechten Seite, so vereinfachen sich die Gleichungen (C_{11}) auf

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\left(\mu\frac{\partial s}{\partial t}+\mu_1 k\right)\frac{\partial x}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\mu_1 c l e^{-\lambda t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\left(\mu\frac{\partial s}{\partial t}+\mu_1 k\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\mu_1 c l e^{-\lambda t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\left(\mu\frac{\partial s}{\partial t}+\mu_1 k\right)\frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots (S)$$

Die dritte dieser Gleichungen gibt in Verbindung mit der Gleichung (R)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c_1 \cdot \frac{\partial s}{\partial t},$$

wenn c_1 die willkührliche Constante ist. Heißt α der Winkel, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit f mit der Achse Ox macht, so hat man $c_1 = \sin\alpha$, daher

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{f\sin\alpha \,.\, e^{-\mu_1 k t}}{1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})}.$$

Fällt jene Richtung mit der Umdrehungsachse ursprünglich zusammen, so ist $\alpha = 90°$ oder $c_1 = 1$, und für die ganze Dauer der Bewegung

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

die Umdrehung bleibt ohne allen Einfluß auf die Bewegung, wie daraus von selbst einleuchtet, daß in diesem, wie in dem ähnlichen im § 23 betrachteten Falle der Bewegung eines excentrischen Geschosses, alle Umstände um die Drehachse herum sich gleich sind.

Wird das Product der ersten Gleichung (S) durch $\frac{\partial y}{\partial t}$ vom Product der zweiten durch $\frac{\partial x}{\partial t}$ abgezogen, so findet sich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\mu_1 c l \,.\, e^{-\lambda t} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right),$$

oder

$$\frac{\partial\,.\,\frac{\partial y}{\partial x}}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\mu_1 c l \,.\, e^{-\lambda t}\,.\,\partial t.$$

Durch Integration erhält man hieraus, indem $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist für $t=0$, oder die Achse der x die auf die Ebene der x und y projicirte Bahn am Anfangspunkte berührt,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right),$$

oder $\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})$ gleich dem Winkel, den die Achse der x mit der oben genannten Projection an irgend einem Punkte derselben, dessen Coordinaten y und x sind oder welcher der Zeit t entspricht, einschließt, und

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = \cos\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right), \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = \sin\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right).$$

Es ist aber $\sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} = \frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{f\cos\alpha .\, e^{-\mu_1 k t}}{1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})}$,

und hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{f\cos\alpha .\, e^{-\mu_1 k t}}{1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})}\cos\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{f\cos\alpha .\, e^{-\mu_1 k t}}{1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})}\sin\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right).$$

Eine zweite Integration gibt

$$z = \frac{\sin\alpha}{\mu}\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})\right),$$

und durch Anwendung der Methode des theilweisen Integrirens

$$x = \frac{\cos\alpha}{\mu}\left[\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})\right)\cos\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right)+\tfrac{1}{2}\mu_1 c l\int\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})\right).\, e^{-\lambda t}\sin\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right)\partial t\right],$$

$$y = \frac{\cos\alpha}{\mu}\left[\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})\right)\sin\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right)-\tfrac{1}{2}\mu_1 c l\int\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 k t})\right).\, e^{-\lambda t}\cos\left(\frac{\mu_1 c l}{2\lambda}(1-e^{-\lambda t})\right)\partial t\right],$$

in welchen Ausdrücken die Glieder unter dem Integralzeichen als mit t verschwindend zu betrachten sind.

§ 66.

Die im vorigen § enthaltene Auflösung umfaßt, sofern von der Wirkung der Schwerkraft abgesehen wird, alle möglichen Fälle der doppelten Bewegung, welche den Gegenstand dieses Kapitels bildet.

Sie zeigt, daß, so wie die ganze Geschwindigkeit des Mittelpunkts und der von ihm zurückgelegte Weg, aber so auch der mit der Umdrehungsachse parallele Theil seiner Geschwindigkeit und des von ihm beschriebenen Weges, in jedem Augenblicke der Bewegung von der Umdrehung vollkommen unabhängig sind.

Findet die Umdrehung in der Richtung statt, daß die vorderen Theile des Geschosses von der rechten nach der linken Seite sich bewegen, oder ist der Winkel $\theta = 0$, so erhält man für $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}$, x, y dieselben Ausdrücke wie im vorigen Falle, wo $\theta = 180°$ ist, und zwar für $\frac{\partial x}{\partial t}$, x mit gleichen Zeichen, für $\frac{\partial y}{\partial t}$, y mit veränderten Zeichen, oder die gefundenen Ausdrücke sind, wenn in ihnen nur das Zeichen der Winkelgeschwindigkeit c verändert wird, auch für diesen Fall gültig. Sie gelten ebenfalls noch,

wenn keine Umdrehung Statt hat oder $c = 0$ ist, in welchem Falle $\frac{dy}{dt}$ und y verschwinden.

Die aus dem Widerstande, den die Luftreibung der Umdrehung entgegensetzt, entstehende Ablenkung des Geschosses von der Richtung seiner Anfangsgeschwindigkeit erfolgt fortdauernd nach derselben Seite, und nimt daher mit der Zeit zu. Die Abweichung geht nach der linken Seite, wenn die Drehung der vordern Theile des Geschosses die Richtung von der linken nach der rechten Seite hat, und bei der entgegengesetzten Richtung nach der rechten Seite.

Wird der Begriff der Rotations-Ebene (§40) hier wieder, und zwar in dem Sinne angewendet, daß unter ihr die im Mittelpunkt des Geschosses auf der Rotations-Achse senkrechte Ebene, welche durch die der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit parallel durch den Mittelpunkt gehende Gerade in einen vorwärtigen und rückwärtigen Theil zerfällt, verstanden wird, so läßt sich der Erfolg, den die Umdrehung durch den Reibungs-Widerstand hervorbringt, allgemein und unabhängig von allen Nebenumständen der Bewegung so ausdrücken, daß die Abweichung stets gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene Statt hat. Fällt die Rotations-Achse anfänglich mit der Richtung der Bewegung des Mittelpunkts zusammen, so hören die Abweichung des Geschosses und die Unterscheidbarkeit der beiden Theile der Rotations-Ebene zu gleicher Zeit auf Statt zu finden.

Um über die Erheblichkeit der Veränderung der Bahn des Geschosses, welche die Umdrehung desselben durch den Reibungswiderstand erzeugt, mit einiger Sicherheit urtheilen zu können, müßten die Werthe des beständigen Coefficienten n für bestimmte Fälle in Zahlen bekannt seyn. Diese Werthe lassen sich nur durch Versuche bestimmen, welche mit eigenthümlichen großen Schwierigkeiten verbunden, und noch gar nicht oder sehr selten angestellt sind. Indessen ist die Annahme hinreichend begründet, daß diese Werthe immer nur so klein sind, daß man, ohne merklich zu fehlen, für Werthe von t, wie sie in der Praxis der Artillerie vorkommen, $1 - \alpha t$ für $e^{-\alpha t}$, und statt des Sinus des Winkels $\frac{nc}{2\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$ den Winkel selbst, setzen kann. Dadurch wird

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{f\cos\alpha . e^{-\mu_1 kt}}{1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 kt})}, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \cos\alpha . \tfrac{1}{2}\mu_1 cl \frac{f . e^{-\mu_1 kt} . t}{1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 kt})},$$

und indem man integrirt,

$$x = \frac{\cos\alpha}{\mu}\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 kt})\right), \qquad y = \cos\alpha . \tfrac{1}{2}\frac{\mu_1}{\mu}cl\left[\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 kt})\right)t - \int\log\left(1+\frac{\mu f}{\mu_1 k}(1-e^{-\mu_1 kt})\right)\partial t\right],$$

oder, wenn ferner $1-\mu_1 kt$ statt $e^{-\mu_1 kt}$ gesetzt wird,

$$x = \frac{\cos\alpha}{\mu}\log(1+\mu ft), \qquad y = \cos\alpha . \tfrac{1}{2}\frac{\mu_1}{\mu} . \frac{cl}{\mu f}(\mu ft - \log(1+\mu ft)). \ (*)$$

(*) Poisson (Rech. p. 76) schließt aus Pendel-Versuchen mit einer Platinkugel, welche sehr kleine Schwingungen machte, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit einer vierzölligen Kugel, deren Oberfläche von gleicher Glätte wie jene der Platinkugel wäre, in der Secunde kaum um den zehntausendsten Theil durch die Luftreibung abnehmen würde. Daraus würde λ ungefähr $= 0,0001$, und wenn man $k = 395^m$ (§58), $\frac{D_1}{D} = 7,2.800$, $l = 0^m,0406$ annimt,

$$n' = 0,000012, \quad \frac{\mu_1}{\mu} = 0,0001, \quad \mu_1 = 0,0000001, \quad \mu_1 k = 0,4\lambda = 0,00004$$

folgen. Wird weiter $f = 400^m$, $c = 400$, $\alpha = 0$ angenommen, so findet man

für $t = 1$, $x = 338^m,41$, $y = 0^m,000125$,
$t = 10$, $x = 1640^m,91$, $y = 0^m,00479$.

Drittes Capitel.

Weitere Folgerungen in Betreff des Einflusses der Rotation auf die Bahn sphärischer Geschosse.

§67.

Wenn ein excentrisches Geschoß mit sphärischer Oberfläche, um dessen Centrallinie (§39) die Masse des Geschosses symmetrisch vertheilt ist (wornach alle senkrecht auf diesen Durchmesser durch den Schwerpunkt gehenden Geraden diesem Punkte angehörige Hauptachsen sind und die Centrallinie selbst eine solche Hauptachse ist), so geladen wird, daß sein Mittelpunkt sich in der Seelenachse des Geschützrohres befindet, so ist die augenblickliche Rotationsachse durch den Schwerpunkt, um welche das Geschoß beim Abfeuern Umdrehung annimmt, eine der auf der Centrallinie senkrechten Hauptachsen (§40).

Wird nun die Wirkung der Schwerkraft auf die Bewegung des Geschosses außer Acht gelassen, so daß die Lage der festen Achse der z' (§5) unabhängig von der Richtung der Schwere gewählt werden kann, so lassen sich die Gleichungen ($A_{\prime\prime}$) und ($B_{\prime\prime}$) des §23 eben so, wie in den §24 u. 26 geschehen ist, auf die drei Gleichungen ($E_{\prime}$) des §26, vermöge welcher der Schwerpunkt und Mittelpunkt sich fortwährend in derselben Ebene, der Rotations-Ebene (§40) bewegen, zurückführen.

Demnach umfassen für $g' = 0$ und unter der obigen, die Einrichtung der Geschosse betreffenden, Voraussetzung, sofern dem Exponenten i nur ein einziger Werth oder nach der Annahme des §35 zugleich die drei Werthe 0, 1, 2 beigelegt werden, die im ersten Kapitel enthaltenen Auflösungen der Gleichungen ($E_{\prime}$) zugleich alle in den allgemeineren Gleichungen ($A_{\prime\prime}$) und ($B_{\prime\prime}$) begriffenen Fälle, und es folgt hieraus, daß unter eben diesen Voraussetzungen eine excentrische Kugel auch bei verhältnißmäßig großen Werthen der Excentricität, der fortschreitenden und der Umdrehungs-Geschwindigkeit, welche Lage im geladenen Geschützrohr dessen Schwerpunkt immer haben mag, in Folge des normalen Widerstandes, den die Rotation erzeugt, nur keine irgend erhebliche, im Bereiche der Möglichkeit

der Beobachtung liegende, Größe von der Bahn, welche er ohne Rotation beschreiben würde, abweichen kann.

§ 68.

Die beiden ersten Gleichungen (E.) sind, wenn man die Coordinaten der Bahn des Mittelpunkts in jene der Bahn des Schwerpunkts übersetzt (§ 25), folgende:

$$\frac{\partial^2 x^0}{\partial t^2} = -\mu\left(\frac{\partial x^0}{\partial t} + \varepsilon p\cos\theta\right)\left[\left(\frac{\partial s^0}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x^0}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^0}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]^{\frac{i-1}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 z^0}{\partial t^2} = -\mu\left(\frac{\partial z^0}{\partial t} - \varepsilon p\sin\theta\right)\left[\left(\frac{\partial s^0}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x^0}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^0}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]^{\frac{i-1}{2}},$$

in welchen Gleichungen der positive Theil der Achse der z^0 als im vorwärtigen Theile der Rotations-Ebene (§ 40) liegend, und der Winkel θ als der von demselben Theile dieser Achse und von der (den Mittelpunkt F enthaltenden) Halbachse Gz eingeschlossenen Winkel vorausgesetzt ist.

Bezeichnen X^0 und Z^0 diejenigen der mit den festen Achsen der x^0 und z^0 parallelen, die Bewegung des Schwerpunkts beschleunigenden Kräfte, welche dem von der Rotation herrührenden normalen Widerstande entsprechen, so hat man hiernach

$$X^0 = -\mu\,\varepsilon p\cos\theta\left[\left(\frac{\partial s^0}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x^0}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^0}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]^{\frac{i-1}{2}},$$

$$Z^0 = +\mu\,\varepsilon p\sin\theta\left[\left(\frac{\partial s^0}{\partial t}\right)^2 + 2\varepsilon p\left(\frac{\partial x^0}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial z^0}{\partial t}\sin\theta\right) + (\varepsilon p)^2\right]^{\frac{i-1}{2}},$$

und diese Kräfte sind, je nachdem ihre Werthe positiv oder negativ sind, nach den positiven oder negativen Seiten der Parallelen Gx^0, Gz^0 gerichtet.

Sie wechseln mit $\cos\theta$ und $\sin\theta$ zugleich ihr Zeichen, und daß der Erfolg, den sie auf die Bahn des Schwerpunkts ausüben, wie die Entwickelungen des ersten Kapitels zeigen, wenn der Exponent i entweder nur einen einzigen, beliebigen reellen Werth oder aggregatorisch die drei Werthe 0, 1, 2 hat, so höchst gering ist, muß nothwendig darauf beruhen, daß ihre Wirkungen während jeder Umdrehung des Geschosses sich mehr u. gänzlich aufheben.

In der That können bei größeren Werthen der Winkelgeschwindigkeit p, von denen hier allein die Rede seyn kann, sowohl diese Geschwindigkeit als auch die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts, deren Quadrat der hier in den Klammern [] enthaltenen Größe gleich ist, während einer Umdrehung nur sehr

wenig sich ändern, und muß jedem Werthe von X°, den der Winkel θ z. B. im ersten oder dritten Quadranten gibt, ein sehr nahe gleicher mit entgegengesetztem Zeichen im zweiten oder vierten Quadranten, und eben so jedem Werthe von Z°, den θ im ersten oder zweiten Quadranten gibt, ein sehr nahe gleicher mit entgegengesetztem Zeichen im vierten oder dritten Quadranten entsprechen, so daß die Summe dieser Werthe für jede ganze Umdrehung beinahe gänzlich verschwindet.

Eine solche gegenseitige Vernichtung der Werthe von X° und Z° muß aber aus den gleichen Gründen unabhängig von i und auch dann noch Statt finden, wenn die Ausdrücke für die Kräfte X° und Z° Aggregate mehrerer Glieder oder einer unbestimmten Anzahl von Gliedern, mit verschiedenen, übrigens beliebigen, reellen Werthen von i sind (§15), und daher wegen der gleichen Ursache unzweifelhaft auch in diesem Falle gegenseitig wieder das Gesammtergebniß ihrer Einwirkungen auf die Bahn des Schwerpunktes auf eine sehr kleine Größe sich beschränken.

Da nun bei jeder Form des Gesetzes, nach welchem der normale Widerstand eines flüssigen Mittels gegen die in ihm sich bewegenden Körper sich richtet, der Ausdruck $\frac{\kappa D \delta V^{i}}{g}$ des §1, und somit die Ausdrücke für X° und Z° als Aggregate der genannten Art sich müssen darstellen lassen, so kann mit Sicherheit hieraus gefolgert werden, *daß, wie immer der Ausdruck dieses Gesetzes als Function der* (normalen) *Geschwindigkeit* V *beschaffen seyn mag, der normale Widerstand, welchen die Flüssigkeit der Rotation eines excentrischen sphärischen Geschosses entgegensetzt, unter den den Gleichungen* (E) *zum Grunde liegenden Voraussetzungen keinen irgend erheblichen Einfluß auf die Bahn des Geschosses haben kann.*

Wird beachtet, daß die Winkelgeschwindigkeit $p = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ihrem Minimum, so wie für $\theta = \frac{3}{2}\pi$ ihrem Maximum, nahe ist (§24), so könnte es, wenn von dem verhältnißmäßig sehr kleinen Unterschiede zwischen dem Minimum und Maximum (§51) abgesehen wird, zwar scheinen, daß die Werthe von Z° zwischen $\theta = \pi$ und $\theta = 2\pi$ jene zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$, absolut genommen, in der Summe überwiegen, und das Geschoß sonach durch jeden Umlauf einen Zuwachs von Geschwindigkeit gegen den rückwärtigen Theil der Rotations-Ebene erlangen müßte, was mit den Erfahrungen über den Einfluß

der Rotation (§71) übereinstimmen würde, und diesen Einfluss als eine besondere Wirkung des normalen Widerstandes erscheinen lassen könnte. Setzt man aber, wie bei schneller Rotation ohne wesentlichen Irrthum geschehen kann, die Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts für die Dauer einer Umdrehung constant gleich F, so findet sich, wie man sich auch i, eindeutig oder mehrdeutig, zu denken haben mag,

$$\int_{\pi \div 0} Z^{\circ} \partial t \quad \text{oder} \quad \mu \varepsilon F^{i-1} \int_{\pi \div 0} \sin \theta \partial \theta \quad = 2 \mu \varepsilon F^{i-1},$$

$$\text{und} \int_{2\pi \div \pi} Z^{\circ} \partial t \quad \text{oder} \quad \mu \varepsilon F^{i-1} \int_{2\pi \div \pi} \sin \theta \partial \theta \quad = -2 \mu \varepsilon F^{i-1};$$

wornach die beiden zwischen den angegebenen Gränzen genommenen Integrale sich genau aufheben würden, indem das, was auf der einen Seite durch die grössere Geschwindigkeit gewonnen wird, auf der andern durch die kürzere Dauer der Berührung wieder verloren geht, so wie auch in den im ersten Kapitel für $\frac{\partial z^{\circ}}{\partial t}$, z°, $\frac{\partial z}{\partial t}$, z erhaltenen Ausdrücken jede Spur eines Übergewichts gegen den rückwärtigen Theil der Rotations-Ebene verschwunden ist.

Auf gleiche Weise ergibt sich

$$\int_{\frac{1}{2}\pi \div 0} X^{\circ} \partial t = \int_{2\pi \div \frac{3}{2}\pi} X^{\circ} \partial t \quad = -\mu \varepsilon F^{i-1},$$

$$\int_{\pi \div \frac{1}{2}\pi} X^{\circ} \partial t = \int_{\frac{3}{2}\pi \div \pi} X^{\circ} \partial t \quad = +\mu \varepsilon F^{i-1}.$$

Man kann daher auch so schliessen: Weil bei gleichbleibender Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts die Gesammtwirkung der Rotation auf das Geschoss durch den normalen Widerstand nach einer ganzen Umdrehung genau gleich Null wäre, so kann auch, wenn diese Geschwindigkeit, wie wirklich der Fall ist, während einer Umdrehung nur wenig sich ändert, weder die Grösse des nach Beendigung eines Umlaufes vom Geschosse zurückgelegten Weges, noch dessen Richtung, durch dieselbe Ursache eine merkliche Änderung erlitten haben, und somit die ganze Bahn nicht erheblich sich ändern.

§69.

Die bei den bisherigen Untersuchungen ausser Acht gebliebene Wirkung der <u>Schwerkraft</u> ist zwar eines der Hauptelemente der Bahn des Geschosses, und muss

daher, wenn es sich von Bestimmung dieser Bahn handelt, nothwendig in Rechnung gezogen werden. Dennoch reichen die Ergebnisse dieser Untersuchungen hin, um über die Erheblichkeit des Einflusses, welchen der der Rotation eines excentrischen Geschosses entgegenstrebende Luftwiderstand auf die Flugbahn desselben haben kann, auch mit Rücksicht auf die Schwerkraft sichern Aufschluss zu geben.

Da nämlich die der Schwere des Geschosses in der Luft entsprechende beschleunigende Kraft g', als vom Schwerpunkt ausgehend, in den Gleichungen für die Umdrehungsbewegung (B.) etc. (315 u. folg.) gar nicht vorkommt, so erhellet zunächst, dass die Veränderungen, welche die Umdrehungsgeschwindigkeit eines Geschosses, dessen Schwerpunkt und Mittelpunkt nicht zusammenfallen, während seiner Bewegung erleidet, nur in so fern von der Schwere abhängen, als die in diesen Gleichungen enthaltenen Grössen $\frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ in Folge der Wirkung der Schwerkraft selbst sich verändern. Sofern daher überhaupt die Rotation auf die fortschreitende Bewegung des Geschosses durch den Widerstand der Luft einzuwirken fähig ist, kann diese Fähigkeit durch die Schwerkraft nur in so weit geändert werden, als der verhältnissmässig sehr geringe veränderliche Theil der Umdrehungsgeschwindigkeit (349) mittelbar auf die angegebene Art von dieser Kraft abhängt, und eine solche Veränderung des Vermögens der Rotation, auf die fortschreitende Geschwindigkeit des Geschosses Einfluss zu üben, muss somit als nahe gänzlich verschwindend betrachtet werden.

Wenn daher auch die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit des Geschosses in jedem Augenblick seiner Bewegung durch die Schwerkraft wesentlich bedingt werden, und deshalb gleichfalls die gesammte Einwirkung der Rotation auf die fortschreitende Bewegung des Geschosses nach Richtung und absoluter Grösse von derjenigen verschieden seyn muss, welche bei gleicher Dauer in dem Falle Statt hätte, wenn die Schwerkraft gar nicht vorhanden wäre, so ist dennoch diese Einwirkung, weil sie überhaupt aus den Gleichungen (E.), welche das Geschoss als der Schwere nicht unterworfen voraussetzen, für Werthe der fortschreitenden und Umdrehungs-Geschwindigkeit, wie sie in der Artillerie-Praxis vorkommen, so höchst unbedeutend sich ergibt, und weil sie auch in Beziehung auf die durch die Schwere veränderten Elemente der Bewegung diese Veränderungen mögen als stetig oder als in endlichen Zeiträumen erfolgend

gedacht werden, als ihrer Natur nach nicht verschieden immer gleich unbedeutend bleiben muß, ohne alles Bedenken ebenfalls auf die Bahn des Geschosses, wie sie sich unter dem Einflusse der Schwerkraft und den weitern, die Bewegung des Schwerpunkts und Mittelpunkts in einer Ebene bedingenden, Voraussetzungen des §24 wirklich gestaltet, als vollkommen unerheblich zu betrachten.

§70.

Im Allgemeinen werden indessen aber diese Voraussetzungen, und insbesondere jene über die Beschaffenheit des Geschosses, welche den Gleichungen (A,,) und (B,,) des §23 zum Grunde liegen, nur selten zutreffen, und weder die Masse des Geschosses um die Centrallinie genau symetrisch vertheilt seyn, noch überhaupt der Mittelpunkt in einer dem Schwerpunkt zugehörigen Hauptachse liegen. Gewöhnlich wird somit die Umdrehung nicht beständig um dieselbe Schwerpunktslinie erfolgen, sondern die Rotations-Achse durch den Schwerpunkt streng genommen jeden Augenblick eine andere dieser Linien seyn, und wird man demgemäß zum Behufe des Calculs das Geschoß als gleichzeitig um die drei rechtwinkligen Haupt-Achsen des Schwerpunkts rotirend sich vorzustellen haben, welche Achsen überdieß ihre Lage im Raume stetig ändern werden. Außerdem können neben der Reibung des Geschosses an den Seitenwänden des Geschützrohrs noch zufällige Ursachen, z. B. Anschläge des Geschosses im Rohre, in der aus der Annahme des §40 folgenden regelmäßigen Umdrehung um eine beständige Achse Störungen erzeugen, wie diese schon durch die Schwerkraft, wenn die Rotations-Achse im Anfange der Bewegung nicht horizontal ist, entstehen müssen.

Allein es läßt sich ohne Schwierigkeit übersehen, daß auch in diesem allgemeinen Falle, in welchem die Bewegung des Schwerpunkts nicht genau in einer und derselben Ebene erfolgen kann, die aus der Rotation durch den Widerstand des flüssigen Mittels entstehenden Einwirkungen auf die Bewegung des Geschosses niemals zu einer erheblichen Größe anwachsen können, so daß vielmehr das aus den Gleichungen (E,) erhaltene Ergebniß als die äußerste Gränze zu betrachten ist, welche jene Einwirkungen nicht überschreiten können.

Während nämlich nach den Voraussetzungen der letztern Gleichungen die Rotation beständig um eine auf der Centrallinie und der Richtungslinie der fort-

schreitenden Bewegung senkrechte Achse Statt hat, macht die augenblickliche Rotations-Achse in dem Falle, von dem hier die Rede ist, im Allgemeinen einen schiefen Winkel mit jeder der genannten Linien, und wenn bei jener Lage der Rotations-Achse die (algebraische) Summe der durch den normalen Luftwiderstand gegen die umdrehende Bewegung in Wirkung tretenden, die fortschreitende Bewegung beschleunigenden Kräfte während jeder Umdrehung beinahe verschwindet (§68), so müssen um so mehr in diesem Falle die genannten Kräfte bei jeder Umdrehung sich nahe gänzlich aufheben, wenn auch die Lage der Rotations-Achse während der Umdrehung selbst sich etwas ändert, indem offenbar der Widerstand gegen die Umdrehung, welcher unter den Voraussetzungen des §23 mit dem Zusammenfallen der Rotations-Achse mit der Centrallinie und der Richtungslinie der fortschreitenden Bewegung gänzlich verschwindet, wenn diese Achse gegen eine der eben genannten Linien, oder gegen beide zugleich, eine schiefe Lage hat, nicht nur kleiner seyn muß als in andern Falle, sondern überdieß aus Theilen besteht, welche sich nicht sämmtlich nach Richtungen, die mit einer und derselben Ebene parallel sind, zusammensetzen lassen. Daher kann auch den weitern Betrachtungen des §68 gemäß, die Gesammtwirkung der Rotation in eben diesem Falle keineswegs stärker hervortreten, als unter den Umständen, auf welche die Gleichungen (E_1) sich beziehen.

Auf alle diese Erörterungen läßt sich endlich mit genügender Sicherheit der Schluß gründen, daß, wie immer die Form des Ausdrucks für den Luftwiderstand (§68) beschaffen seyn mag, die allgemeinen Gleichungen für die doppelte Bewegung eines excentrischen Geschosses, wie sie in §15 dargestellt sind, auch wenn sie sich vollständig integriren ließen, eben so wenig als die Gleichungen (E_1), zu dem Ergebnisse des Vorhandenseyns irgend eines nicht ganz unerheblichen Einflusses der Rotation auf die Bahn des Geschosses führen können, und daß somit überhaupt der normale Widerstand, den die Luft der umdrehenden Bewegung entgegensetzt, einen solchen Einfluß nicht hervorzubringen vermag.

§ 71.

Den aus theoretischen Gründen hier abgeleiteten Folgerungen scheint jedoch, da nach den Untersuchungen des vorigen Kapitels auch im Reibungswiderstande der Luft eine mögliche Ursache merklicher Abweichung des Geschosses nicht zu erkennen ist, durch die Erfahrung ganz entschieden widersprochen zu werden. Nach vielfältigen, bei den Ar-

tillerien mehrerer Staaten angestellten Beobachtungen ist es unbestreitbare Thatsache, daß die Umdrehung auf die Bahn kugelförmiger Geschoße, deren Mittelpunkt und Schwerpunkt nicht zusammenfallen, sehr bedeutend einwirkt, so daß Rücksichtnahme auf diese Eigenschaft bei der Anwendung solcher Geschoße zu einer wesentlichen Bedingung ihrer Wirksamkeit wird. Den genannten Erfahrungen gemäß stehen die Lage des Schwerpunkts im geladenen Geschützrohr und die hievon abhängige Richtung der Rotation in unverkennbarem Zusammenhange mit der Richtung, in welcher die Geschoße abgelenkt werden, so zwar, daß sie rechts oder links von der vertikalen Richtungsebene abweichen, wenn der Schwerpunkt im Geschützrohr rechts oder links von der Seelenachse liegt, und somit der vordere Theil des Geschoßes von der linken gegen die rechte Seite oder in entgegengesetzter Richtung sich dreht, und daß sie bei entsprechender Erhöhung des Geschützrohrs weiter oder kürzer gehen, wenn der Schwerpunkt über oder unter der Seelenachse liegt, oder daß allgemein, nach dem Begriffe der Rotationsebene (§40), die Ablenkung gegen den rückwärtigen Theil derselben erfolgt.

§72.

Als Beitrag zur Bestätigung der Thatsache können die Ergebnisse folgender, bei der württembergischen Artillerie im Jahre 1840 unternommener, Versuche dienen.

Die Geschoße waren die bereits (§41) erwähnten zehnpfündigen excentrischen Granaten, deren Einrichtung und Beschaffenheit von den Voraussetzungen des §67 im Allgemeinen sich wenig entfernten. Sie wurden theils aus der Haubitze, theils aus dem Mörser geworfen, und so in das Geschützrohr eingeführt, daß entweder die Mundlochsachse mit der Seelenachse parallel war, wobei entweder die Centrallinie horizontal, der Schwerpunkt rechts oder links vom Mittelpunkte, oder die Centrallinie in der Vertikalebene der Seelenachse, der Schwerpunkt über oder unter dem Mittelpunkte, lag, oder daß die Centrallinie mit der Seelenachse parallel, der Schwerpunkt vor oder hinter dem Mittelpunkte, und die Mundlochsachse in der Vertikalebene der Seelenachse, war, welche verschiedenen Lagen des Geschoßes in den hier folgenden Übersichten durch „Schwerpunkt rechts, vorn, u. s. w." bezeichnet sind. Die Aushöhlung der Granaten war bei den Versuchen leer, das Mundloch mit einem hölzernen Zapfen ausgefüllt.

Versuche mit excentrischen Granaten aus dem zehnpfündigen Mörser im Monat Dezember 1840.

Ladung in Lothen	Erhöhung des Geschützes in Graden	Lage des Geschosses im Rohr	Anzahl der Würfe	Mittlere Wurfweite	Unterschied zwischen der größten und kleinsten Wurfweite	Mittlere Seiten-Abweichung	Breite des Raumes der Seiten-Abweichungen	Zahl der nach jeder Seite abgewichenen Geschosse
12	35	Schwerp. oben	10	622	126	1,2 rechts	22	6 rechts 4 links
12	35	Schwerp. unten	10	577,5	91	5,9 links	25	2 rechts 8 links
12.	35	Schwerp. rechts	10	561,5	126	41,2 rechts	18	10 rechts
12	55	Schwerp. oben	10	540	73	18,9 links	38	10 links
12	55	Schwerp. unten	10	523	59	13,3 links	38	1 rechts 9 links
12	55	Schwerp. rechts	3	538	57	56,3 rechts	24	3 rechts
12	55	Schwerp. links	7	529	106	40,9 links	30	7 links
12	20	Schwerp. oben	10	393	81	1,5 links	5	6 links 4 ohne Abweichung
12	20	Schwerp. unten	10	311	72	3,4 links	11	2 rechts 8 links
12	70	Schwerp. oben	10	322	61	4,1 links	46	4 rechts 5 links 1 ohne Abweichung
12	70	Schwerp. unten	10	369	60	1,3 links	36	3 rechts 6 links 1 ohne Abweichung
24	80	Schwerp. oben	3	132	64	14,3 links	83	1 rechts 2 links
24	80	Schwerp. unten	5	611	113	23,8 rechts	102	4 rechts 1 links
24	80	Schwerp. rechts	1	375		258 rechts		
24	85	Schwerp. oben	3	29,3 ungefähr [illegible] rückwärts	68	21 rechts	85	2 rechts 1 links
24	85	Schwerp. unten	2	473	14	7,5 rechts	3	2 rechts
24	85	Schwerp. rechts	1	255		306 rechts		

Versuche mit excentrischen Granaten aus der zehnpfündigen Haubitze

in den Monaten November und December 1840.

Ladung in Pfunden	Erhöhung des Geschützes in Graden	Lage des Schwerpunkts im Rohr	Anzahl der Würfe	Mittlere Wurfweite	Unterschied zwischen der größten und kleinsten Wurfweite	Mittlere Seitenabweichung	Breite des Raums der Seitenabweichungen	Zahl der nach jeder Seite abgewichenen Geschosse
1/2	13 1/2	Schwerp. vorn	10	717	266	0,7 links	21	4 rechts 6 links
1/2	13 1/2	Schwerp. hinten	10	720	154	2,1 links	26	3 rechts 6 links 1 ohne Abweichung
1/2	13 1/2	Schwerp. oben	10	907	223	7,6 links	24	1 rechts 9 links
1/2	13 1/2	Schwerp. unten	10	568	71	1 links	19	3 rechts 7 links
1/2	13 1/2	Schwerp. rechts	5	646	114	38 rechts	18	5 rechts
1/2	13 1/2	Schwerp. links	5	613	78	30 links	11	5 links
5/4	10	Schwerp. hinten	10	1328	543	9 links	92	5 rechts 5 links
5/4	10	Schwerp. oben	11	2316	244	15,9 rechts	173	6 rechts 5 links
5/4	10	Schwerp. unten	10	1055	84	2 links	21	4 rechts 6 links
5/4	10	Schwerp. links	10	1424	92	133,8 links	39	10 links

Bemerkungen:

Die Entfernungen sind in Schritten zu 2,75 württ. Fuß angegeben.

Mittlere Seitenabweichung ist der durch die Zahl der Würfe dividirte Unterschied zwischen der Summe der Abweichungen nach der einen und der Summe der Abweichungen nach der andern Seite.

Breite des Raums der Seitenabweichungen die Summe der größten Abweichung nach der einen und jener nach der andern Seite, wenn die Geschosse nach beiden Seiten, und der Unterschied zwischen der größten und kleinsten Abweichung, wenn sie nur nach einer Seite abweichen.

§ 73.

Um möglichen Zweifeln zu begegnen, ob nicht etwa die Ablenkung der Geschosse Folge eines Stoßes war, den sie beim Austritte aus der Mündung durch eine von der Rotation abhängige, regelmäßig in schiefer Richtung gegen die Seelenachse wirkende Ursache erhielten, wurden ferner aus dem zehnpfündigen Mörser gegen eine 10 Schritt vor dem Geschütze aufgestellte senkrechte Bretterwand vier excentrische Granaten, deren Schwerpunkt rechts, und vier andere, deren Schwerpunkt links im Geschützrohr lag, mit halbpfündiger Ladung abgeworfen. Die Abweichung von der vertikalen Richtungsebene nach der Seite, wo der Schwerpunkt lag, betrug in der Wand durchschnittlich nur 0,15 Fuß, während die vier ersten Granaten mit 20 Grad Erhöhung des Geschützrohrs bei einer mittleren Wurfweite von 737 Schritt eine mittlere Abweichung von 57 Schritt, und die vier letzten Granaten mit 22 Grad Erhöhung bei einer mittleren Wurfweite von 747,5 Schritt eine mittlere Abweichung von 59,5 Schritt nach eben der Seite, wo der Schwerpunkt lag, erreichten. Wäre die ablenkende Ursache eine nicht fortdauernd, sondern an der Mündung plötzlich wirkende gewesen, so hätte, abgesehen von dem Verluste an Geschwindigkeit, den die Geschosse durch das Durchdringen der Wand erlitten, die Abweichung in der Wand, im Verhältniß zur Abweichung am Ende der Bahn, 2,16 Fuß oder etwa 14 Mal so groß als sie wirklich war, seyn müssen. Woher nun auch die kleine Abweichung in der Bretterwand entstanden seyn mochte, so kann die ganze Ablenkung der Geschosse während ihrer Bewegung keinesfalls aus einem an der Mündung ihnen mitgetheilten schiefen Stoße erklärt, sondern nur einer stetig fortwirkenden Ursache, welche in Folge der durch den excentrischen Stoß der Geschützladung auf das Geschoß erzeugten Rotation in Thätigkeit trat, zugeschrieben werden.

Als solche Ursache bot sich in natürlicher Gedankenfolge zunächst der der Rotation eines excentrischen Geschosses entgegentretende normale Luftwiderstand dar, indem dieser gegen die beiden ungleichen Kugel-

abschnitte, in welche das Geschoß durch den im Schwerpunkt auf der Centrallinie senkrechten Durchschnitt zerfällt, ebenfalls ungleiche Wirkung haben muß. Allein nach dem, was die auf die Grundlehren der Mechanik gebaute ausführlichere Calcul hierüber an die Hand gibt, reicht der auf die Bewegung der Geschoße überhaupt so mächtigen Einfluß über den Luftwiderstand zur Erklärung der Erscheinungen keineswegs aus. Es mußte sich daher die Frage aufdrängen, ob denn die einmal vorhandene Rotation der Excentricität noch ferner bedürfe, um diese Erscheinungen herbeizuführen, oder ob nicht vielmehr, nachdem die Excentricität dazu gedient hat, die Rotation hervorzubringen, die letztere für sich allein auf irgend eine Weise die Ablenkung des Geschoßes zu bewirken vermöge, und ob daher die Umdrehung nicht auch auf Geschoße, deren Schwerpunkt und Mittelpunkt gänzlich oder nahe zusammenfallen, denselben Einfluß zeige wie auf excentrische.

Da aus dem Gebiete der bekannten Erfahrungen, ohne Zweifel wegen der Schwierigkeiten, denen besonders die Wahrnehmung und Beobachtung der Rotation der Geschoße, wie auch die Erkennung und Ermittelung der Excentricität derselben, unterliegt, zur Aufklärung dieser Frage nichts zu entnehmen war, so wurde gesucht sie durch directe Versuche zu beantworten, und für diesen Zweck Geschoße, welche als nicht excentrisch betrachtet werden konnten, so abzuschießen, daß sie neben der fortschreitenden zugleich eine starke rotirende Bewegung annehmen mußten.

Zwei verschiedene Wege ließen die Möglichkeit, zu dem genannten Ziele zu gelangen, erblicken. Einmal konnten Geschoße aus einem Geschützrohre von größerem als dem ihnen entsprechenden Caliber mit Hülfe hölzerner Spiegel, durch welche sie einen excentrischen Stoß erhalten, abgefeuert werden. Sodann konnte ein vor der Mündung des Geschützrohrs, welches gleiches Caliber mit den Geschoßen hatte, angebrachtes künstliches Hinderniß dazu dienen, einen Anschlag in bekannter Richtung hervorzubringen.

§ 74.

Das erstere Mittel zeigte sich günstiger. Aus dem zehnpfündigen Mörser wurden siebenpfündige Granaten in hölzernen Spiegeln von der durch Fig. 5 dargestellten Form mit excentrischer Aushöhlung abgefeuert. Der

Abstand des Mittelpunkts des in den Spiegel gesetzten Geschosses von der Achse der äußern Gestalt des Spiegels, welche Achse im geladenen Geschützrohre mit der Seelenachse zusammenfiel, oder die Excentricität des Spiegels, betrug 0,03 Fuß, und die diese Excentricität messende gerade Linie stand somit im Rohre senkrecht auf der Seelenachse. Sie wurde bei den Versuchen horizontal, der Mittelpunkt des Geschosses auf die rechte oder linke Seite der Vertikalebene der Seelenachse, gelegt.

Die Aushöhlung der siebenpfündigen Granaten, welche weder Füllloch noch Öhr hatten, war mit der äußern Oberfläche concentrisch, und blieb bei den Versuchen leer, das Mundloch wurde mit einem hölzernen Zapfen ausgefüllt. Der Flug des zehnpfündigen Mörsers, dessen Lager und Kammer Borkenstein'sche Construction hatten, war 0,58 Fuß weit und 0,826 Fuß lang.

Bei den ersten Versuchen, welche nur zur Prüfung der Anwendbarkeit der Spiegel für den beabsichtigten Zweck dienen sollten, wurden zwölf Granaten mit halbpfündiger Ladung und 30 Grad Erhöhung geworfen. Sechs derselben wurden so geladen, daß der Mittelpunkt des Geschosses rechts von der Seelenachse lag, und dieses somit in solcher Richtung rotiren mußte, daß dessen vorderer Theil von der linken nach der rechten Seite sich bewegte, und die sechs andern wurden so eingeführt, daß der Mittelpunkt des Geschosses links von der Seelenachse lag, und daß die Richtung der Umdrehung demnach jener der sechs ersten entgegengesetzt war. Alle diese Geschoße wichen nach derjenigen Seite von der Vertikalebene der Seelenachse ab, auf der ihr Mittelpunkt lag, und es betrug bei einer mittleren Wurfweite von 891 Schritt die mittlere Abweichung 126 Schritt.

Hierauf wurden zum Behuf weiterer Versuche, welche in den Monaten November und Dezember 1843 Statt fanden, aus einer Zahl von 100 neugegossenen siebenpfündigen Granaten 20 ausgesucht, welche beim Eintauchen in Quecksilber geringe Excentricität zeigten, und auch sonst, besonders in Bezug auf die äußere Oberfläche, von regelmäßiger Beschaffenheit waren. Es wurde zwar keine solche gefunden,

welche in jeder Lage auf dem Quecksilber in Ruhe blieb, oder deren Mittelpunkt und Schwerpunkt genau zusammenfielen, doch war die Excentricität der ausgewählten Geschosse, welche mit Hülfe des im Anhange I beschriebenen Apparates bestimmt wurde, als unerheblich zu betrachten. Im Geschützrohr lag die Centrallinie des Geschosses parallel mit der Seelenachse, der Schwerpunkt hinter dem Mittelpunkt. Die Würfe, im Ganzen 36, geschahen gleichfalls mit halbpfündiger Ladung und 30 Grad Erhöhung.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind aus folgender Tabelle zu ersehen.

Versuche mit siebenpfündigen Granaten und excentrischen Spiegeln aus dem zehnpfündigen Mörser.

Einschreibungs-Nummer	Durchmesser	Excentricität	Gewicht	November 1843		December 1843	
	der Geschoße			Wurfweite	Seiten-Abweichung	Wurfweite	Seiten-Abweichung
1	0,51	0,0024	14,594	867	128	887	132
6	0,5115	0,0034	14,637	931	244	945	135
9	0,51	0,0014	14,422	803	153	891	121
10	0,51	0,0014	14,396	833	103	821	104
20	0,509	0,0017	14,465	900	183	805	111
22	0,5115	0,0031	14,488	831	144	925	150
24	0,5095	0,0029	14,477	829	132	845	134
25	0,51	0,0016	14,559	825	145	853	154
28	0,5105	0,0014	14,473	862	112	873	127
29	0,5125	0,0012	14,422	829	111	879	139
30	0,509	0,0021	14,459	953	166	810	132
32	0,511	0,0026	14,523	860	185	896	145
38	0,5115	0,0011	14,531	795	102	888	181
47	0,511	0,0037	14,672	810	105	926	124
48	0,5115	0,0023	14,617	819	116	917	128
49	0,51	0,0014	14,484	860	150	908	128
68	0,51	0,0022	14,516	868	117		
81	0,5095	0,0018	14,459	865	139		
90	0,5095	0,0024	14,375	890	153		
95	0,5105	0,0024	14,402	905	157		
Mittelzahlen				858	142	879	134

Bemerkungen zur vorstehenden Tabelle:

Die Durchmesser und Excentricitäten sind in württ. Fußen, die Gewichte in württ. Pfunden, die Wurfweiten und Seitenabweichungen in Schritten zu 2,75 Fuß angegeben.

Alle Geschoße weichen nach derjenigen Seite der Vertikalebene der Seelenachse ab, auf der ihr Mittelpunkt lag.

Bei den Versuchen im November 1843 lag der Mittelpunkt aller Geschoße rechts, bei jenen im December 1843 der Mittelpunkt der acht Geschoße Nr 1 – 25 rechts, der der acht Geschoße Nr 28 – 49 links.

Die Trümmer der hölzernen Spiegel, welche durch zwei aufgeleimte Leinwandstreifen leicht mit den Granaten verbunden waren, fielen 50 – 100 Schritt vor dem Geschütze zu Boden.

§ 75.

Aus den dargelegten Versuchen geht ein bedeutender Einfluß der Rotation, in welche die Geschoße durch den excentrischen Stoß der Geschützladung versetzt werden mußten, auf die Bahn derselben, von welcher Natur dieser Einfluß nun seyn mochte, unzweifelhaft hervor, und zwar hatte die Abweichung bei jedem Wurfe regelmäßig nach derselben Seite Statt, nach welcher bei der Umdrehung der vordere Theil des Geschoßes sich bewegte.

Um sich indessen zu versichern, ob die starke Abweichung, welche im Durchschnitt nahe den sechsten Theil der Wurfweite betrug, nicht Folge eines schiefen Stoßes war, den das Geschoß beim Austritte aus der Mündung mittelst des excentrischen Spiegels erhielt, wurden ebenfalls von den in der vorigen Tabelle aufgeführten zwanzig siebenpfündigen Granaten acht, deren Mittelpunkt theils rechts, theils links von der Seelenachse im Geschützrohr lag, gegen eine 10 Schritt vor der Mündung errichtete senkrechte Bretterwand, mit halbpfündiger Ladung und excentrischen Spiegeln von der im vorhergehenden § angegebenen Einrichtung, aus dem zehnpfündigen Mörser geworfen. Die Versuche ergaben, daß die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit wirklich nicht in der Vertikalebene der Seelenachse lag, indem die Bretterwand im Durchschnitt 1,5

Fuß seitwärts von der letzteren Ebene, und zwar bei jedem Wurf auf eben der Seite derselben, wo der Mittelpunkt sich befand, getroffen wurde. Diese Abweichung ist einerseits viel zu groß, als daß sie sich aus der Rotation allein erklären ließe, und muß daher größtentheils einem dem Geschoße an der Mündung mitgetheilten schiefen Stoße zugeschrieben werden; sie ist aber andererseits auch zu klein, um die ganze Abweichung der Geschoße am Ende ihrer Bahn aus einem solchen Stoße erklärlich zu machen. Denn da diese Abweichung nahe den sechsten Theil der Wurfweite erreichte, so hätte die Abweichung in der Wand nahe 4,5 Fuß, oder drei Mal so groß als sie wirklich war, seyn müssen, wenn das Geschoß in derselben Vertikalebene, in der die Richtung seiner Anfangsgeschwindigkeit lag, seine Bewegung vollendet hätte. Daß es aber in keiner Vertikalebene sich bewegte, sondern mit stetig wachsender Abweichung nach der Seite, auf welcher im Geschützrohr sein Mittelpunkt gelegt war, eine Linie von doppelter Krümmung beschrieb, war bei der Beobachtung seiner Bahn mit dem Auge ganz sicher zu erkennen. Demnach müssen nur noch zwei Drittheile der ganzen Abweichung, welche bei 30 Grad Erhöhung des Geschützrohrs und bei der angewendeten Ladung und Excentricität des Spiegels nahe den neunten Theil der Wurfweite ausmachen, auf Rechnung der Rotation geschrieben werden.

Ferner wurde versucht, durch ein vor der Mündung des Geschützrohrs angebrachtes künstliches Hinderniß (173), gegen welches das Geschoß beim Heraustreten aus der Mündung anprallen mußte, Rotation hervorzubringen, und zu diesen Versuchen bediente man sich gleichfalls einer Anzahl der in der vorigen Tabelle bezeichneten siebenpfündigen Granaten, welche aus der siebenpfündigen Haubitze abgeschossen wurden. Ein 1,8 Fuß langer Stab von Tannenholz, dessen Querschnitt ein Quadrat von 0,13 Fuß Seite war, wurde in vertikaler Richtung so vor der Mündung des Geschützes befestigt, daß er um 0,05 Fuß rechts oder links von der Mitte der Mündung abstand. War der Stab auf der rechten Seite der Mündung, so mußte das Geschoß durch Anschlagen an denselben zuerst etwas links abweichen, und, indem es eine

rotirende Bewegung annehmen, bei der dessen vorderer Theil von der linken nach der rechten Seite sich drehte, durch den Einfluß der Rotation wieder nach der rechten Seite abgelenkt werden; und so umgekehrt, wenn der Stab links war. Der Erfolg einer Anzahl Schüsse mit halbpfündiger Ladung, welche theils auf eine vor dem Geschütze stehende Wand, theils ins Freie geschahen, rechtfertigte zwar im Allgemeinen diese Annahmen, sprach sich jedoch bei weitem nicht so unzweideutig und entschieden aus, als bei den Versuchen mit excentrischen Kugeln; wohl ohne Zweifel, weil das Hinderniß viel zu schwach war, um eine beträchtliche Umdrehungsgeschwindigkeit zu erzeugen.

Weitere Versuche, bei welchen die Umdrehung der Geschoße um eine horizontale Achse erfolgt wäre, anzustellen, wurde nicht für sehr wesentlich erachtet, indem die Abweichungen, welche, in senkrechter Richtung auf die Vertikal-Ebene der Seelenachse, durch Umdrehung um eine mit dieser Ebene ursprünglich gleichlaufende Achse bewirkt, Statt hatten, die Erscheinungen in ihrer einfachsten Gestalt darstellten, und zur Entscheidung über die Frage, welche die Versuche veranlaßte, vollkommen ausreichend erschienen.

§ 76.

Wenn nämlich auch die Excentricität der in der Tabelle des § 74 aufgeführten zwanzig Geschoße nicht gänzlich gleich Null war, so konnte sie doch offenbar als an und für sich zu gering, und überdieß vermöge der der Centrallinie im Geschützrohr gegebenen Lage, zu der durch die Rotation entstandenen starken Abweichung der Geschoße nichts beitragen, so wie auch in den, wohl nur durch zufällige Umstände herbeigeführten, Unterschieden der Abweichungen, besonders wenn man sie mit den Abweichungen der excentrischen Granaten (§ 72) zusammenstellt, durchaus keine Beziehung zu den Unterschieden der Excentricitäten zu erkennen ist; wornach es als hinreichend erwiesen gelten kann, daß die Ablenkungen, welche bei den Versuchen sowohl mit excentrischen zehnpfündigen Granaten, als auch mit den concentrisch construirten siebenpfündigen Granaten sich ergaben,

unabhängig von der Excentricität, in der Rotation allein ihren Entstehungsgrund hatten, und hierdurch der weitere Schluß begründet ist, daß auch solche Geschoße mit kugelförmiger Oberfläche, deren Mittelpunkt und Schwerpunkt genau zusammenfallen, wenn ihnen neben der fortschreitenden zugleich eine starke rotirende Geschwindigkeit mitgetheilt wird, dieselben Erscheinungen wie die excentrischen zeigen werden.

Durch diese Thatsachen ist aber die Frage, um deren Aufklärung es sich hauptsächlich handelt, worin nämlich eben die durch Vermittlung der Rotation als thätig auftretende Ursache der Abweichungen eigentlich bestehe, auf einen viel einfacheren Standpunkt zurückgeführt, sofern die sie betreffenden Untersuchungen, ohne Beachtung der Excentricität, nur noch auf ein Geschoß von der oben genannten Gestalt und Beschaffenheit, dessen Masse übrigens als gleichförmig oder ungleichförmig um den Mittelpunkt vertheilt gedacht werden kann, sich zu beziehen haben.

Was daher die nähere Erklärung der Erscheinungen anbelangt, so ist diesem Standpunkte gemäß nach dem Vorigen zuvörderst klar, daß der normal gegen die, als regelmäßig vorausgesetzte, kugelförmige Oberfläche gerichtete Luftwiderstand die Ursache, nach welcher gefragt wird, nicht seyn kann. Denn wenn die Excentricität gleich Null ist, so gehen die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung auf die Gleichungen für die Bewegung eines nicht rotirenden Geschoßes zurück, oder ist jene Bewegung von der Umdrehung vollkommen unabhängig.

Aber auch in dem auf die Oberfläche der Kugel in berührender Richtung wirkenden Reibungswiderstande der Luft kann jene Ursache nicht gefunden werden. Denn nicht nur ist nach den Entwicklungen des zweiten Kapitels die Ablenkung der Geschoße, welche aus dem letzteren Widerstande hervorgehen kann, mit derjenigen verglichen, welche der Erfahrung gemäß wirklich Statt hat, viel zu gering, sondern die durch die Luftreibung entstehende Ablenkung der Geschoße müßte überdieß, wenn sie auch vermöge des numerischen Werthes, den sie nach der Rechnung erreichen kann, jemals in Betracht kommen könnte, der Natur der

Sache nach, wie sich von vorn herein, auch abgesehen von den zum Theil willkürlichen Voraussetzungen des §158, beurtheilen läßt, gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene gerichtet seyn, während die Abweichung, wie sie thatsächlich durch die Umdrehung bewirkt wird, allen Beobachtungen nach stets gegen den rückwärtigen Theil dieser Ebene erfolgt. Bei der Integration und Auflösung der mit Rücksicht auf die Luftreibung abgeleiteten Gleichungen für die doppelte Bewegung des Geschosses ist zwar die Wirkung der Schwerkraft, eben so wie bei den Untersuchungen des ersten Kapitels, außer Acht geblieben. Allein die Schwerkraft ist in diesem Falle ganz ohne allen Einfluß auf die Rotations-Bewegung (§63), und die von der Umdrehung herrührende Ablenkung des Geschosses ändert sich durch die hinzutretende Schwerkraft nur insofern, als überhaupt die Bahn desselben bei gleicher Zeitdauer durch die Wirkung dieser Kraft eine andere wird. Und weil eben diese Ablenkung bei nicht vorhandener Schwerkraft so ganz unerheblich seyn würde, so kann auch die Bahn, wie sie unter der Einwirkung derselben Kraft wirklich beschrieben wird, durch die Rotation keine merkliche Änderung erleiden.

Aus den vorangehenden Erörterungen leuchtet sodann zugleich von selbst ein, daß auch der normale Luftwiderstand und der berührende der Luftreibung vereint in Folge der Umdrehung des Geschosses eine der beobachteten ähnliche Wirkung nicht hervorzubringen vermögen.

Eben so wenig aber, als die bis jetzt betrachteten Einflüsse zu der Erklärung, um die es sich hier handelt, genügen, kann bei der entschiedenen Abhängigkeit der Abweichung von der Richtung der Rotation davon die Rede seyn, sie von zufälligen Umständen, z. B. unvollkommener sphärischer Rundung, ableiten zu wollen, indem eine beharrliche Ablenkung nach derselben Richtung durch solche Umstände nicht denkbar ist.

§ 77.

Der Umstand, daß die Oberfläche der Artillerie-Geschosse gewöhnlich mehr oder weniger rauh ist, könnte etwa zu der Frage Veranlassung geben, ob nicht in dem normalen Widerstande gegen die kleinen Erhabenheiten und

Vertiefungen der Oberfläche rotirender Geschoße eine Ursache zu fortdauernd nach derselben Richtung zunehmenden Abweichungen derselben gegeben sey, obgleich schon ein allgemeiner Überblick der Sachverhältnisse nicht zu Gunsten dieser Ansicht spricht.

Für den Zweck einer nähern Prüfung dieser Frage aber genügt es, statt der Kugel eine Kreisfläche (Scheibe von unendlich kleiner Dicke), welche gleichförmig nach einer in ihrer Ebene liegenden Richtung und zugleich um eine im Mittelpunkt auf ihr senkrechte Rotations-Achse sich bewegt, und welche als der durch die Richtung des Schwerpunkts der Kugel senkrecht auf die Rotations-Achse gelegte Durchschnitt derselben angesehen werden kann (§ 2), in Betracht zu ziehen, indem ein Einfluß der genannten Art, wenn er vorhanden ist, schon bei der Bewegung eines solchen Kreises sich geltend machen muß.

Es sey AeA' (Fig. 6) die Kreisfläche, c der mit dem Schwerpunkt zusammenfallende Mittelpunkt derselben, cc' die Richtung der Bewegung des Mittelpunkts, cg auf cc' senkrecht; der Kreis drehe sich um c in der Richtung von cg gegen die vordere Seite cc'; am Punkt e des Umfanges befinde sich die, den Durchschnitt einer hervorragenden Fläche vorstellende, Linie ek, welche mit dem verlängerten Halbmesser ce in der durch die Figur bezeichneten Richtung den Winkel α bildet; es soll der normale Widerstand, den die vorstehende Linie ek verursacht, bestimmt werden.

Man bezeichne mit

l den Halbmesser des Kreises,

c die fortschreitende Geschwindigkeit,

p die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung desselben,

θ den von cg an gerechneten Winkel gce, den der Halbmesser ce bei der Umdrehung beschreibt,

k die Länge der Linie ek,

u die Länge eines durch den Punkt m begränzten Theiles em dieser Linie,

so daß p, θ, so wie α, abstracte Zahlen, l, c, k und u Längengrößen bedeuten.

Wird auf ek im Punkte m die Senkrechte mn, und aus c mit ek die

Parallele co, welche der mn in o begegnen, gezogen, so ist $co = l\cos\alpha + u$, und die auf ek normale Geschwindigkeit des Punktes m

vermöge der Umdrehung $= p(l\cos\alpha + u)$,

vermöge der fortschreitenden Geschwindigkeit des Kreises $= c.\cos(\theta-\alpha)$,

daher die ganze normale Geschwindigkeit dieses Punktes, welche mit V bezeichnet und nach der Richtung von m nach n, wie sie die Umdrehung gibt, als positiv gerechnet werde,

$$V = c.\cos(\theta-\alpha) + p(l\cos\alpha + u).$$

Die Geschwindigkeit V wird gleich Null, wenn der Winkel $\theta-\alpha$, welcher hier nur auf eine Umdrehung bezogen und nicht größer als 360° gedacht wird, gleich $180^\circ \mp \text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+u)$ wird, wo $\text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+u)$ ($\alpha < 90^\circ$ vorausgesetzt) den Bogen im ersten Quadranten bedeutet.

Am Punkte e, wo $u = 0$ ist, und um so mehr für größere Werthe von u, wird daher

V positiv, wenn $\theta-\alpha < 180^\circ - \text{arc}\cos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ oder $> 180^\circ + \text{arc}\cos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ ist;

am Punkt k, wo $u = k$ ist, und um so mehr für kleinere Werthe von u, wird dagegen

V negativ, wenn $\theta-\alpha > 180^\circ - \text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$ und $< 180^\circ + \text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$ ist.

Bei der Umdrehung ist somit V für die ganze Linie ek positiv, während der Werth des Winkels $\theta-\alpha$ von $180^\circ + \text{arc}\cos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ an nach der Richtung der Umdrehung bis zu $180^\circ - \text{arc}\cos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ übergeht, und für die ganze Linie ek negativ, während dieser Werth von $180^\circ - \text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$ nach der Richtung der Umdrehung bis zu $180^\circ + \text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$ fortschreitet; und so lange der Winkel $\theta-\alpha$ zwischen die beiden im zweiten Quadranten liegenden Gränzen $180^\circ - \text{arc}\cos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ und $180^\circ - \text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$, so wie zwischen die beiden im dritten Quadranten liegenden Gränzen $180^\circ + \text{arc}\cos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$ und $180^\circ + \text{arc}\cos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ fällt, ist V für den Theil von ek zwischen k und dem Punkte, an welchem $u = -\frac{c}{p}\cos(\theta-\alpha) - l\cos\alpha$ ist, positiv, und für den übrigen Theil negativ, indem für Werthe von $\theta-\alpha$, welche zwischen die angegebenen im zweiten und dritten Quadranten liegenden Gränzen fallen, $u = -\frac{c}{p}\cos(\theta-\alpha) - l\cos\alpha$ die Geschwindigkeit V gleich Null gibt.

Nimt man, was für diese Untersuchung genügt, den Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional an, so ist das unbestimmte Integral

$$\int V^2 du = (c\cos(\theta-\alpha)+pl\cos\alpha)^2\, u + p\,(c\cos(\theta-\alpha)+pl\cos\alpha)\,u^2 + \tfrac{1}{3}p^2u^3,$$

welches in Bezug auf denjenigen Theile des vom Punkt e durchlaufenen Kreisumfanges, wo V für die ganze Linie ek positiv oder negativ ist, zwischen $u=k$ und $u=0$, und in Bezug auf die übrigen Theile dieses Umfanges, wo V für einen Theil von ek positiv, für den andern negativ ist, zwischen $u=k$ und $u=-\frac{c}{p}\cos(\theta-\alpha)-l\cos\alpha$, so wie zwischen $u=-\frac{c}{p}\cos(\theta-\alpha)-l\cos\alpha$ und $u=0$ zu nehmen ist, und man hat ferner

$$\int V^2 du_{k\div 0} = (c\cos(\theta-\alpha)+pl\cos\alpha)^2 k + p\,(c\cos(\theta-\alpha)+pl\cos\alpha)\,k^2 + \tfrac{1}{3}p^2k^3,$$
$$= (c\cos(\theta-\alpha)+p(l\cos\alpha+\tfrac{1}{2}k))^2 k + \tfrac{1}{12}p^2k^3,$$

wofür zur Abkürzung Rk gesetzt werde,

$$\int V^2 du_{k\div -\frac{c}{p}\cos(\theta-\alpha)-l\cos\alpha} = Rk - \frac{(-c\cos(\theta-\alpha)-pl\cos\alpha)^3}{3p},$$

$$\int V^2 du_{-\frac{c}{p}\cos(\theta-\alpha)-l\cos\alpha\div 0} = \frac{(-c\cos(\theta-\alpha)-l\cos\alpha)^3}{3p}.$$

Bezeichnet

P den positiven, d.i. den von n nach m gerichteten, Widerstand gegen die Linie ek,

Q den negativen, d.i. den von m nach n gerichteten, Widerstand gegen diese Linie,

(welche Größen an sich ihrem Wesen nach immer positiv seyn müssen, und nur nach der Richtung, in der sie wirken, positiv oder negativ genannt werden,)

so ist demnach (31)

1) für Werthe von $\theta-\alpha$ von $180° + \arccos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ an nach der Richtung der Umdrehung bis zu $180° - \arccos\frac{p}{c}l\cos\alpha$,

$$P = \frac{nD}{g}Rk, \qquad Q = 0,$$

2) für Werthe von $\theta-\alpha$ von $180° - \arccos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$ an nach der Richtung der Umdrehung bis zu $180° + \arccos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$,

$$P = 0, \qquad Q = \frac{nD}{g}Rk,$$

3) für Werthe von $\theta-\alpha$ zwischen $180° - \arccos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ und $180° - \arccos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$,

so wie zwischen $180° + \arccos\frac{p}{c}(l\cos\alpha+k)$ und $180° + \arccos\frac{p}{c}l\cos\alpha$,

$$P = \frac{nD}{g}\left(Rk - \frac{(-c\cos(\theta-\alpha)-pl\cos\alpha)^3}{3p}\right), \qquad Q = \frac{nD}{g}\,\frac{(-c\cos(\theta-\alpha)-pl\cos\alpha)^3}{3p}.$$

Man sieht, daß der Factor R zwei Maxima und zwei Minima in Bezug auf den Winkel θ hat, nämlich

das eine Maximum $= \left(c + p\left(l\cos\alpha + \frac{1}{2}k\right)\right)^2 + \frac{1}{12}p^3k^2$, für $\theta - \alpha = 0$,

das andere Maximum $= \left(c - p\left(l\cos\alpha + \frac{1}{2}k\right)\right)^2 + \frac{1}{12}p^2k^2$, für $\theta - \alpha = 180°$;

das eine Minimum $= \frac{1}{12}p^2k^2$ für $\theta - \alpha = 180° - \arccos\frac{p}{c}\left(l\cos\alpha + \frac{1}{2}k\right)$,

das andere Minimum $= \frac{1}{12}p^2k^2$ für $\theta - \alpha = 180° + \arccos\frac{p}{c}\left(l\cos\alpha + \frac{1}{2}k\right)$,

und daß für die beiden letzten Werthe von $\theta - \alpha$

$$P - Q = \frac{nD}{g} \cdot \frac{1}{24}p^2k^3$$

wird.

Wird der Widerstand nach den beiden, auf einander winkelrechten, Richtungen cc_1 und cg zerlegt, so ist

der mit cc_1 parallele Theil von $P = P\cos(\theta - \alpha)$, von $Q = Q\cos(\theta - \alpha)$,

von welchen bei positiven Werthen jener die Richtung von c_1 gegen c, dieser die Richtung von c gegen c_1 hat,

der mit cg parallele Theil von $P = P\sin(\theta - \alpha)$, von $Q = Q\sin(\theta - \alpha)$,

von welchen bei positiven Werthen jener die Richtung von c gegen g, dieser die entgegengesetzte Richtung hat.

178.

Um zu übersehen, ob in den gefundenen Ausdrücken für den normalen Widerstand gegen die hervorragende Linie ek etwas enthalten ist, was zur Erklärung der Abweichungen rotirender Geschosse dienen könnte, hat man nur die senkrecht auf die fortschreitende Bewegung gerichteten Theile dieses Widerstandes näher zu untersuchen nöthig, und kann dabei ferner wegen der Kleinheit von k den Widerstand gegen die Linie ek in denjenigen beiden Abschnitten des vom Punkt e beschriebenen Umdrehungskreises, wo die normale Geschwindigkeit dieser Linie theils positiv theils negativ ist, außer Acht lassen.

Nach der Bedeutung, in welcher die Zeichen R, P, Q im vorigen § genommen sind, und dem Umfange der Werthe von $\theta - \alpha$, auf welchen P und Q sich beziehen, gehört zu jedem Werthe des Winkels $\theta - \alpha$ von 0 an (nach der Richtung der Umdrehung) bis zu $180° - \arccos\frac{p}{c}l\cos\alpha$ ein Werth auf der anderen Seite von 0 bis zu $180° + \arccos\frac{p}{c}l\cos\alpha$, welcher

mit jenem gleichen Werth von P gibt, und eben so zu jedem Werthe des Winkels $\theta - \alpha$ von $180°$ an bis zu $180° - \arccos \frac{k}{c}(l \cos\alpha + k)$ ein Werth auf der anderen Seite von $180°$ bis zu $180° + \arccos \frac{k}{c}(l \cos\alpha + k)$, der mit jenem gleichen Werth von Q gibt, indem, wenn λ irgend einen Winkel bedeutet, $\cos\lambda = \cos -\lambda = \cos(360° - \lambda)$, und $\cos(180° - \lambda) = \cos(180° + \lambda)$ ist. Und weil $\sin\lambda = -\sin -\lambda = -\sin(360 - \lambda)$, $\sin(180 - \lambda) = -\sin(180 + \lambda)$ ist, so würden, wenn die Dichtigkeit der Luft, abgesehen von der Veränderung, welche sie durch die Bewegung der Linie ck selbst erleidet, im ganzen Umfange des rotirenden Kreises AcA fortwährend gleich wäre, sowohl die Theile $P \sin(\theta - \alpha)$ des positiven Widerstandes unter sich, als auch die Theile $Q \sin(\theta - \alpha)$ des negativen Widerstandes unter sich, während jeder Umdrehung sich gegenseitig genau aufheben. Weil aber, wenn auch die Bewegung der Fläche ck für sich auf die Dichtigkeit der sie umgebenden Luft einigen, durch die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dieser Fläche in die Rechnung eingehenden, Einfluß hat, der Dichtigkeitszustand der Luftschichten in der Nähe des Geschoßes im Ganzen hauptsächlich durch die fortschreitende Bewegung der kugelförmigen Oberfläche derselben bedingt wird, so daß im Allgemeinen an der vordern Halbkugel Verdichtung, an der hintern Verdünnung Statt findet, und daß die Dichtigkeit von dem vordersten bis zum hintersten Punkte nach einem bestimmten Gesetze stetig abnimmt, so muß auf diesen Unterschied bei der gegenwärtigen Untersuchung besondere Rücksicht genommen werden.

179.

Betrachtet man nun zuerst kleine Werthe des Winkels α, so wird zwar vermöge des genannten Unterschiedes der Luftdichtigkeit sowohl von den Widerstandstheilen $P \sin(\theta - \alpha)$ die Summe der positiven Werthe jene der negativen, als auch eben so von $Q \sin(\theta - \alpha)$ die Summe der positiven jene der negativen Werthe, übertreffen. Weil aber zugleich die positiven Werthe von $P \sin(\theta - \alpha)$ durch die positiven von $Q \sin(\theta - \alpha)$, so wie die negativen von $P \sin(\theta - \alpha)$ durch die negativen von $Q \sin(\theta - \alpha)$, größtentheils aufgewogen werden, so ergibt sich, daß dennoch durch den normalen Widerstand gegen die Fläche ck keine merkliche Abweichung nach der auf cc, senkrechten Richtung entstehen kann. Im Ganzen scheint zwar bei den gegenseitigen Vernichtungen der Widerstandswerthe etwas übrig zu bleiben, was das Geschoß von c gegen g,

d. i. gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene, treiben könnte; dieses würde jedoch mit der Erfahrung im Widerspruche stehen.

Bei grösseren Werthen von α wird man im Allgemeinen eine Begränzung der Erhabenheit wie ekc_1 (Fig. 7) annehmen können, so dass $ek = kc_1$ und der Winkel $\alpha_1 = \alpha$ ist. In Bezug auf die Linie ek kann nur ein positiver Widerstand, in Bezug auf die Linie c_1k nur ein negativer in Betracht kommen, weil die negative Geschwindigkeit der Linie ek und die positive der Linie c_1k, als nach dem Innern der Erhabenheit ekc_1 gerichtet, keinen Widerstand erzeugen können. In den obigen Formeln für den negativen Widerstand ist ferner der Winkel α negativ zu nehmen, und der Winkel θ auf den Halbmesser cc_1 statt auf ce zu beziehen. Bezeichnet man den Winkel ecc_1 mit γ, so ist der Winkel $gcc_1 = \theta - \gamma$, und, indem man $ek = k$ setzt, der Winkel γ durch die Gleichung $tg\frac{1}{2}\gamma = \frac{k\sin\alpha}{l+k\cos\alpha}$ gegeben.

Aus §77 folgt, dass

1) von $\theta = 180° + \alpha + \arccos\frac{k}{c}l\cos\alpha$ an bis $\theta = 180° + \gamma - \alpha - \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ allein der positive Widerstand gegen ek wirksam ist,

2) von $\theta = 180° + \gamma - \alpha - \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ an bis $\theta = 180° + \alpha - \arccos\frac{k}{c}l\cos\alpha$ der positive Widerstand gegen ek und der negative gegen c_1k zugleich wirksam sind,

3) von $\theta = 180° + \alpha - \arccos\frac{k}{c}l\cos\alpha$ an bis $\theta = 180° + \gamma - \alpha + \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ nur der negative Widerstand gegen c_1k, und

4) von $\theta = 180° + \gamma - \alpha + \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ an bis $\theta = 180° + \alpha + \arccos\frac{k}{c}l\cos\alpha$ weder der eine noch der andere Statt findet,

wodurch der Umdrehungskreis der Erhabenheit ekc_1 in vier Abschnitte zerfällt.

Weil $\arccos\frac{k}{c}l\cos\alpha$ und $\arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ nicht viel von 90° verschieden seyn können, so wird ($\alpha < 90°$ vorausgesetzt) der zweite dieser Abschnitte, in welchem sowohl gegen ek als gegen c_1k Widerstand Statt findet, auf der vorderen, durch die für $\theta = 90° + \frac{1}{2}\gamma$ mit der Linie ck zusammenfallende Richtungslinie cc_1 bezeichnete, Seite, und der vierte Abschnitt, in welchem weder ek noch c_1k Widerstand erleiden, auf der hinteren Seite des Geschosses, wo die Linie ck für $\theta = 270° + \frac{1}{2}\gamma$ mit der Verlängerung von cc_1 zusammenfällt, sich befinden.

In dem Augenblicke aber, wenn $\theta = 90° + \frac{1}{2}\gamma$ ist oder die Erhabenheit ekc_1

sich an dem Punkte befindet, wo die Luft die größte Dichtigkeit hat, wird $P\sin(\theta-\alpha)$ nahe $= Q\sin(gce_1+\alpha)$, welche beiden Werthe sich somit großentheils aufheben. Eben so heben sich während der Umdrehung im Allgemeinen der Widerstand gegen ek und jener gegen e_1k an je zwei Punkten, die vom vordersten oder hintersten nach beiden Seiten gleich weit abstehen, und wo demnach der Dichtigkeitszustand der Luft der gleiche ist, größtentheils gegenseitig auf, indem, wenn man für den Widerstand gegen ek den Winkel $\theta = 90° - \theta_1$ oder $= 270° - \theta_1$, für den Widerstand gegen e_1k den Winkel $gce_1 = 90° + \theta_1$ oder $= 270° + \theta_1$, oder innerhalb des vordern Abschnittes des Umdrehungskreises auch umgekehrt θ in gleicher Art größer als gce_1 setzt, ebenfalls $P\sin(\theta-\alpha)$ nahe $= Q\sin(gce_1+\alpha)$, und zwar von den beiden Größen P und Q, je nachdem $\theta-\alpha$ oder $gce_1+\alpha$ kleiner als $90°$ ist, die erste oder die zweite nicht viel größer als die andere, wird.

Auch der normale Widerstand gegen die Erhabenheit eke_1 kann demnach zur Ablenkung des Geschosses nichts erhebliches beitragen.

Von diesem Widerstande wäre zwar derjenige Theil des normalen Widerstandes gegen den Kreisumfang AeA', welcher auf den durch die Erhabenheit eke_1 bedeckten Bogen ee_1 fällt, in Abzug zu bringen. Weil jedoch, wie leicht erhellet, der mit cg parallele Theil des Widerstandes gegen den Bogen ee_1 während einer Umdrehung sich ebenfalls selbst vernichtet, so kann derselbe bei der Untersuchung, von der es sich hier handelt, ganz unbeachtet bleiben.

180.

Fallen beide Endpunkte der Linie $ek = k$ (Fig. 6) in den Umfang des Kreises AeA', oder ist ek eine Sehne dieses Kreises, so hat man $\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos(180°-\alpha) = \frac{k}{2l}$, und nur den positiven Widerstand gegen die Sehne ek in Betracht zu ziehen.

In diesem Falle wird $l\cos\alpha + \frac{1}{2}k = 0$, oder $l\cos\alpha = -\frac{1}{2}k$, $l\cos\alpha + k = +\frac{1}{2}k$, und, indem man einen Winkel $\vartheta = \theta - \frac{1}{2}\gamma = \theta + 90° - \alpha$ einführt, d. i. den Winkel ϑ von cg an gegen ct, bis zur Senkrechten aus c auf die Sehne rechnet und $90° + \frac{1}{2}\gamma$ statt α setzt,

$$\delta - \alpha = \vartheta - 90^\circ, \qquad R = c^2 \sin^2\vartheta + \tfrac{1}{12} p^2 k^2,$$

$$180^\circ - \arccos \tfrac{p}{c} l \cos\alpha = \arccos \frac{pk}{2c},$$

$$180^\circ + \arccos \tfrac{p}{c} l \cos\alpha = 360^\circ - \arccos \frac{pk}{2c},$$

$$180^\circ \mp \arccos \tfrac{p}{c}(l\cos\alpha + k) = 180 \mp \arccos \frac{pk}{2c},$$

wo unter $\arccos \frac{pk}{2c}$ der Bogen im ersten Quadranten verstanden wird.

Die beiden Maxima von R werden, so wie die beiden Minima von R, unter sich gleich, nämlich $= c^2 + \frac{1}{12} p^2 k^2$, und das eine Maximum findet für $\vartheta = 90^\circ$, das andere für $\vartheta = 270^\circ$, das eine Minimum für $\vartheta = 0$, das andere für $\vartheta = 180^\circ$ Statt.

Der normale Widerstand gegen die Sehne ist ganz positiv von $\vartheta = 90^\circ - \arccos \frac{pk}{2c}$ an nach der Richtung der Umdrehung bis zu $\vartheta = 90^\circ + \arccos \frac{pk}{2c}$, für andere Werthe von ϑ entweder ganz oder theilweise negativ, und vom Halbmesser des Geschosses ganz unabhängig.

Der mit cg parallele Theil des Widerstandes wird

$$Q \cos\vartheta = \frac{nD}{g}\left(c^2 \sin^2\vartheta + \tfrac{1}{12} p^2 k^2\right) k \cos\vartheta,$$

und hat als positiv gedacht die Richtung von g gegen c. Er ist absolut genommen gleich groß und nur im Zeichen verschieden für je zwei Werthe von ϑ, die um gleich viel größer und kleiner als 90° sind, oder an Punkten des Umdrehungskreises, die vom vordersten nach beiden Seiten um gleich viel abstehen, woraus folgt, daß die sämmtlichen Werthe dieses Widerstandstheiles, unabhängig von der Größe der Sehne k, während einer Umdrehung sich gegenseitig genau aufheben. Auch in diesem Falle kann somit der normale Widerstand gegen den nichtsphärischen Theil des Umfanges AeA' keine Ablenkung hervorbringen.

Wird endlich der Winkel α größer als derjenige, den die Sehne ek mit der Verlängerung des Halbmessers ce bildet, oder wird $l\cos\alpha + \frac{1}{2}k$ negativ, so geht die Erhabenheit ehe_1 (Fig. 7) in eine Vertiefung über, bei welcher man ebenfalls $ek = he_1$, $\alpha = \alpha_1$ nehmen, und den Widerstand gegen ek als positiv, gegen he_1 als negativ betrachten kann, indem man nämlich wie bei der Erhabenheit die auf ek normale Geschwindigkeit, wenn sie von ek aus nach der Seite gerichtet ist, wo die Verlängerung des Halbmessers ce

liegt, als positiv, und die auf e,k normale Geschwindigkeit, wenn sie die Richtung nach derjenigen Seite von e,k hat, auf der die Verlängerung des Halbmessers $ce,$ liegt, als negativ vorausgesetzt.

Von den vier Abschnitten, in welche nach §79 der Umdrehungskreis der Hervorragung $ekc,$ zerfällt, verschwinden der erste und der dritte beim Übergange der Hervorragung in eine Schneide, womit zugleich der Unterschied zwischen ek und e,k aufhört. Geht aber die Erhabenheit in eine Vertiefung über, so treten auch eben diese Abschnitte, nur weil mit wachsendem Winkel α derjenige Theil des Umdrehungskreises, wo Widerstand gegen die Linie ek statt hat, nach der Richtung der Umdrehung, der Theil, wo dieses gegen e,k der Fall ist, in entgegengesetzter Richtung im Kreise fortgerückt ist, in veränderter Reihenfolge, wieder auf, so daß bei der Umdrehung die Linie e,k vor der ek in den Bereich des Widerstandes kommt, oder der Abschnitt, in welchem nur die Linie e,k Widerstand erleidet, der erste, der andere dieser beiden Abschnitte der dritte wird.

Es findet sonach Widerstand gegen e,k allein statt

1) von $\theta = 180° + \gamma - \alpha - \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ an bis $\theta = 180° + \alpha + \arccos\frac{k}{c}\, l\cos\alpha$,

gegen ek und e,k zugleich

2) von $\theta = 180° + \alpha + \arccos\frac{k}{c}\, l\cos\alpha$ an bis $\theta = 180° + \gamma - \alpha + \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$,

gegen ek allein

3) von $\theta = 180° + \gamma - \alpha + \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ an bis $\theta = 180° + \alpha - \arccos\frac{k}{c}\, l\cos\alpha$,

weder gegen e,k noch gegen ek

4) von $\theta = 180° + \alpha - \arccos\frac{k}{c}\, l\cos\alpha$ an bis $\theta = 180° + \gamma - \alpha - \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$,

und es ergibt sich, da die nun in den zweiten Quadranten übergetretenen Winkel $\arccos\frac{k}{c}\, l\cos\alpha$ und $\arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k)$ nicht viel größer als 90° seyn können, daß, auch wenn $\alpha > 90°$ ist, wie bei der Erhabenheit $ekc,$, der zweite dieser Abschnitte auf der vorderen, der vierte auf der hinteren Seite des Geschoßes sich befindet, woraus dann weiter in Beziehung auf die gegenseitige Aufhebung der Widerstandstheile $P\sin(\theta - \alpha)$ und $Q\sin(gce, + \alpha)$ dieselben Schlüsse, wie für die Erhabenheit (§79), folgen. Je nachdem $\theta - \alpha$ oder $gce, + \alpha$ kleiner als 90° ist, wird im Allgemeinen P kleiner oder größer als Q.

§81.

Eine Anwendung auf Zahlenbeispiele wird auch hier zur Erläuterung des Vorgetragenen dienen.

Nimmt man $c = 800$, $l = 0{,}25$ in Fußen, $p = 400$, so wird der von c gegen c auf den Kreisumfang AeA' wirkende Gesammtwiderstand $\frac{nD}{g}c^2 \cdot \frac{4}{3}l = \frac{nD}{g} \cdot \frac{800^2}{3}$.

1) In Bezug auf die vorstehende Linie ek (Fig. 6) sey dann $k = 0{,}01$ und $\alpha = 0$. Man erhält

$\arccos \frac{k}{c} l \cos\alpha = 82^\circ 49'$, $\arccos \frac{k}{c}(l\cos\alpha + k) = 82^\circ 32'$,

das eine Maximum von $Rk = c^2 \cdot 0{,}012713$ für $\theta = 0$,

das andere Maximum . . . $= c^2 \cdot 0{,}007613$ für $\theta = 180^\circ$,

das Minimum $= c^2 \cdot 0{,}0000002$ für $\theta = 180^\circ \mp 82^\circ 40',5$,

ferner Rk $= c^2 \cdot 0{,}006966$ für $\theta = 45^\circ$,

$= c^2 \cdot 0{,}003359$ für $\theta = 135^\circ$.

An den Punkten des Umdrehungskreises, wo Rk ein Größtes ist, verschwindet $\sin(\theta - \alpha)$, und wo $\sin(\theta - \alpha)$ seinen größten Werth hat, nähert sich Rk seinem kleinsten; was überhaupt für jeden Werth von α gilt.

2) Wird für die Hervorragung ehe_i (Fig 7) $k = 0{,}01$ und der Winkel $\alpha = 45^\circ$ angenommen, so findet sich

$\arccos \frac{k}{c} l\cos\alpha = 84^\circ 56'$, $\arccos \frac{k}{c}(l\cos\alpha + k) = 84^\circ 39'$, $\gamma = 3^\circ 9'$.

Läßt man den Unterschied γ der Winkel gce und gce_i unbeachtet, so sind die vier Gränzwerthe von θ für die vier Abschnitte des Umdrehungskreises (§79)

$309^\circ 56'$, $50^\circ 21'$, $140^\circ 4'$, $219^\circ 39'$,

und $P = \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}000083$ für $\theta = 315^\circ$,

$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}006368$ für $\theta = 0$,

$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}011900 =$ Max. für $\theta = 45^\circ$,

$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}006368$ für $\theta = 90^\circ$,

$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}000083$ für $\theta = 135^\circ$.

$Q = \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}003797$ für $\theta = 90^\circ$,

$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}008265 =$ Max. für $\theta = 135^\circ$,

$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}003797$ für $\theta = 180^\circ$;

3) Ist die Linie ek eine Sehne des Kreises AeA' und $k = 0{,}75$, so ergibt sich

der Winkel $\alpha = 98^\circ 38'$, $\gamma = 17^\circ 16'$, $\arccos \frac{pk}{2c} = 88^\circ 56'$,

das eine und das andere Maximum von $Rk = c^2 \cdot 0{,}075009$ für $\theta = 90^\circ$ und 270°,

das eine und das andere Minimum von $Rk = c^2 \cdot 0{,}000009$ für $\theta = 0$ und 180°.

4) Wird für die Vertiefung che, wieder $k = 0{,}01$, der Winkel $\alpha = 135^\circ$ angenommen, so findet sich

$$\arccos\frac{k}{c}\, l\cos\alpha = 95^\circ 4', \qquad \arccos\frac{k}{c}(l\cos\alpha + k) = 94^\circ 47', \qquad \gamma = 3^\circ 20'.$$

Läßt man den Winkel γ unbeachtet, so sind die vier Gränzwerthe von θ für die vier Abschnitte des Umdrehungskreises (§80)

$$310^\circ 13', \quad 50^\circ 4', \quad 139^\circ 47', \quad 219^\circ 56',$$

und

$$P = \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}003859 \quad \text{für } \theta = 90^\circ,$$
$$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}008356 = \text{Max. für } \theta = 135^\circ,$$
$$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}003859 \quad \text{für } \theta = 180^\circ,$$

$$Q = \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}000074 \quad \text{für } \theta = 315^\circ,$$
$$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}006288 \quad \text{für } \theta = 0,$$
$$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}011792 = \text{Max für } \theta = 45^\circ,$$
$$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}006288 \quad \text{für } \theta = 90^\circ,$$
$$= \frac{nDc^2}{g} \cdot 0{,}000074 \quad \text{für } \theta = 135^\circ.$$

§82.

Man übersieht aus diesen Darstellungen, daß im vordern Halbkreise, und ebenso im hintern, je die positiven und die negativen Widerstandswerthe um so mehr unter sich sich gegenseitig aufheben, je näher der Winkel α dem Winkel $180^\circ - \arccos\frac{k}{2l}$ kommt, daß dagegen in jedem der beiden Halbkreise der positive Widerstand mehr durch den negativen, und eben so umgekehrt dieser durch jenen, aufgehoben wird, je mehr der Winkel α gegen 0 oder 180° sich von dem letztern Werthe entfernt. Im Ganzen genommen scheint zwar, wenn der Winkel α diesen Werth nicht hat, bei den gegenseitigen Vernichtungen der Widerstandswerthe etwas übrig zu bleiben, was das Geschoß gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene treiben könnte; allein ein solches Ergebniß, welches gleichmäßig auch für mehrere zugleich am Kreisumfange befindliche, den betrachteten ähnliche, Hervorragungen oder Vertiefungen gilt, läßt sich mit der Erfahrung nicht vereinigen.

Weil aber offenbar, wenn der normale Luftwiderstand gegen die von der vollkommenen Kugelgestalt abweichenden Theile der Oberfläche der Artillerie-Geschoße die Ursache der im Gefolge der Rotation beobachteten Erscheinungen wäre, die Rechnung das Vorhandenseyn eines solchen Einflusses auch unter den ihr hier zum Grunde gelegten Voraussetzungen,

wenigstens bei einer der gewählten Formen der Unebenheiten, zeigen müßte, so kann man sicher seyn, daß, wie auch der Ausdruck für diesen Widerstand als Function der normalen Geschwindigkeit gestaltet seyn mag, jene Erscheinungen in den Mängeln der Oberfläche kugelförmiger Geschosse, wie sie in der Praxis der Artillerie vorkommen, ihren Ursprung nicht haben können. Und da der aus der Rechnung hervorgehende mögliche Einfluß des normalen Luftwiderstandes gegen die Unregelmäßigkeiten der Oberfläche rotirender Geschosse auf die Bahn derselben dem, was die Erfahrung als Folge der Umdrehung gibt, der Richtung nach gerade entgegengesetzt ist, so muß hieraus geschlossen werden, daß dieser Einfluß, eben so wie der ähnliche des berührenden Widerstandes der Luftreibung, in der Wirkung einer viel mächtigeren Ursache, welche durch die Rotation in Thätigkeit gesetzt wird, verschwindet.

Daß die Umdrehung, der Behauptung Eulers (*) gemäß, wirklich diejenige Abweichung zu vermindern dient, welche eine an irgend einer Stelle der vordern Halbkugel befindliche Unregelmäßigkeit der Oberfläche in dem Falle, wenn das Geschoß sich nicht drehte, durch den Luftwiderstand verursachen könnte, läßt sich ferner aus dem Vorhergehenden leicht übersehen.

§ 83.

Man hat einen weitern Erklärungsgrund für die erwähnten Erscheinungen in ungleicher Dichtigkeit der Luft zu beiden Seiten der Ebene, welche durch die Richtung der Geschwindigkeit des Mittelpunkts und die auf dieser Richtung senkrecht gedachte Rotations-Achse geht, zu finden geglaubt. Wenn z. B. bei vertikaler Rotations-Achse die vordere Halbkugel von der linken gegen die rechte Seite sich dreht, so würde dieser Ansicht gemäß durch die größere Geschwindigkeit, mit der die Theile der Oberfläche auf der linken Seite in Folge der Rotation sich bewegen, die Luft auf dieser Seite mehr verdichtet als auf der rechten, indem die Flächenelemente auf der linken Seite stärker gegen die berührenden Luftschichten anstoßen und deren Bewegung nach hinten erschweren, auf der rechten

(*) Neue Grundsätze der Artillerie, 2tes Kap. Satz VII.

Seite dagegen das Abfließen der Luft nach hinten durch die Umdrehung des Geschosses erleichtert würde.

Ließe sich nachweisen, daß durch die Umdrehung eine erheblich größere Dichtigkeit der Luft auf der linken als auf der rechten Seite wirklich entstehe, so wäre in diesem Unterschiede eine Ursache für die Abweichungen, welche die Beobachtungen zeigen, allerdings gegeben.

Allein durch die normale Geschwindigkeit des Geschosses, von welcher wesentlich nur die Veränderung der Dichtigkeit der umgebenden Luft abhängt, kann, wenn dasselbe eine um ihren Mittelpunkt sich drehende Kugel ist, dessen Umdrehung zu einem solchen Unterschiede der Luftdichtigkeit nichts beitragen, weil diese Umdrehung, wie der Ausdruck für V des §60 zeigt, keinen Einfluß auf die normale Geschwindigkeit der Oberfläche der Kugel hat, indem überhaupt die normale Geschwindigkeit einer Ebene, welche nach einer in ihr selbst liegenden Richtung sich bewegt, gleich Null ist. Es bleibt daher nur die berührende Geschwindigkeit der Oberfläche übrig, durch welche der bemerkte Unterschied in der Luftdichtigkeit, wenn er als Folge der Umdrehung wirklich Statt findet, hervorgebracht werden müßte. Aber auch die berührende Geschwindigkeit kann ohne Zweifel keine merkliche Veränderung in der Dichtigkeit der Luft bewirken, weil die Bewegung einer Ebene nach einer in sie selbst fallenden Richtung in der berührenden Luft durchaus kein Hinderniß von einiger Erheblichkeit finden kann. Ein genau um seine Achse sich drehendes cylindrisches Schwungrad mit regelmäßiger Oberfläche z. B. vermag, so schnell es auch bewegt wird, keine einigermaßen in die Sinne fallende Bewegung, daher auch keine Verdichtung, in der umgebenden Luft hervorzubringen. Der Einfluß der berührenden Geschwindigkeit auf die Bewegung des kugelförmigen Geschosses ist ja nichts anderes als der des Widerstandes der Luftreibung, welcher nach dem Ergebniß der Untersuchungen des zweiten Kapitels wegen der größern Dichtigkeit der Luft an der vordern, als an der hintern, Halbkugel nur in einer, jedoch durch Beobachtung nicht wahrnehmbaren, Ablenkung des Geschosses gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene, d. i. im obigen

Falle nach der linken Seite, bestehen kann, und mit einer Verdichtung der Luft auf dieser Seite unvereinbar ist. Ein Unterschied in der Dichtigkeit der Luft, woraus die Abweichungen kugelförmiger Geschosse, welche bei solchen, deren Schwerpunkt und Mittelpunkt zusammenfallen, eben sowohl als bei den exzentrischen Statt finden, sich erklären ließen, kann somit weder aus der normalen noch aus der berührenden Geschwindigkeit der Oberfläche, wie immer fortschreitende und umdrehende Bewegung mit einander verbunden seyn mögen, hervorgehen.

184.

Zu fernerer Erläuterung dieses Gegenstandes, besonders in Bezug auf die Dichtigkeit der das Geschoss umgebenden Luftschichten, mögen noch folgende Bemerkungen hier Platz finden.

Betrachtet man zuerst eine ohne Rotation in der Luft sich fortbewegende nicht exzentrische Kugel, so müssen die Schichten dieser Flüssigkeit, welche das Geschoss vor sich nach und nach auf seinem Wege trifft, da sie nicht augenblicklich ausweichen und mit den benachbarten Schichten sich ins Gleichgewicht setzen können, zusammengedrückt und verdichtet werden. Je größer die normale Geschwindigkeit der verschiedenen Flächen-Elemente der vordern Halbkugel ist, desto stärker müssen die sie berührenden Luftschichten durch die Stöße, welche sie nach der Richtung dieser Geschwindigkeit erhalten, zusammengedrückt werden, und die Verdichtung derselben wird daher am vordersten, in die Richtungslinie des Mittelpunkts fallenden, Punkte der Oberfläche am größten, am Umfange des auf dieser Linie senkrechten größten Kreises aber gleich Null seyn, weil hier die normale Geschwindigkeit gleich Null ist. Auf gleiche Weise muß an der hintern Halbkugel in den sie zunächst umgebenden Lufttheilchen, da diese den von eben diesem größten Kreise durchschrittenen Raum, den die hintere Halbkugel nicht einnimmt, so wie den Raum, den die letztere verläßt, nicht augenblicklich wieder ausfüllen können, eine Verdünnung entstehen, die an Punkten mit (absolut) größerer normalen Geschwindigkeit ebenfalls größer ist

als an andern, und eben diese Theile der Luft müssen sofort, so wie das Geschoß über sie hinaus fortschreitet, durch Zufluß von den angränzenden Luftsäulen, die kurz zuvor unter dem Einflusse der Bewegung der vordern Halbkugel standen, ihre frühere natürliche Dichtigkeit wieder erlangen.

Der normale Widerstand, den die Luft der Bewegung des Geschoßes entgegensetzt, ist nichts anderes als der Unterschied zwischen dem größern Drucke, den sie auf die vordere, und dem kleinern, den sie auf die hintere Halbkugel ausübt. Der Druck, welcher im Zustande des Gleichgewichts der Dichtigkeit der Luft proportional ist, hängt im Zustande der Bewegung außerdem noch von der Größe und Richtung der Geschwindigkeit der Lufttheilchen ab, und sowohl die Dichtigkeit als der Druck müssen, als hauptsächlich von der Bewegung des Geschoßes abhängig, Functionen der Geschwindigkeit des letztern seyn. Befindet sich die Luft, für sich und abgesehen von der Bewegung des Geschoßes, wie dieses vorausgesetzt werden muß, im Gleichgewichte, so müssen nicht nur an allen Punkten der Kugeloberfläche, welche gleiche normale Geschwindigkeit haben, d. i. am ganzen Umfange eines jeden auf der Richtungslinie der Bewegung des Mittelpunkts senkrechten Parallelkreises, weil um diese Linie herum alles vollkommen gleich ist, sowohl Druck als Dichtigkeit gleich groß seyn, sondern eben diese Größen müssen auch, wegen der stetig gebildeten Gestalt des Körpers, von einem Parallelkreise zum andern stetig sich ändern, und es muß der Ausdruck des normalen Widerstandes gegen ein Element der Kugeloberfläche für alle dem Widerstande ausgesetzten Theile derselben der nämliche seyn, oder in dem Ausdrucke $\frac{nDbV^i}{g}$ (31), welcher bei aggregatorischer Bedeutung des Exponenten i und des Coefficienten n jede Function der normalen Geschwindigkeit V vorstellen kann, müssen diese Größen i und n für alle Punkte der Oberfläche die nämlichen Werthe haben. Ist dagegen die Gestalt der Oberfläche keine stetige, oder enthält sie unregelmäßige Theile, Erhabenheiten oder Vertiefungen, so wird der Ausdruck des Widerstandes nicht für deren ganzen Umfang der gleiche seyn, oder werden der Exponent i und der Coefficient n

nicht für alle Theile der Oberfläche dieselben Werthe haben. Hieraus erhellet aber, daß bei der stetig gestalteten Kugeloberfläche, indem man $\frac{nDbV^i}{g}$ in der allgemeinen Bedeutung, wie bei den vorangehenden Untersuchungen, als Ausdruck des normalen Widerstandes nimt, auch die Dichtigkeit der Luft, soweit überhaupt dieser Widerstand von ihr abhängt, welche Funktion der Geschwindigkeit V derselbe immer seyn mag, eben hierdurch bereits in die Rechnung eingeht, daß aber, wenn die Oberfläche kein stetiges Ganzes bildet, indem man für den ganzen Umfang dieselben Werthe von i und n beibehält, noch auf die aus der Unterbrechung der Stetigkeit hervorgehende Veränderung der Dichtigkeit besondere Rücksicht genommen werden muß.

Außer dem normalen Widerstande wirkt ferner auf die nicht rotirende Kugel der der fortschreitenden Bewegung entgegentretende berührende Widerstand, welcher wie jener ringsum die Richtungslinie des Mittelpunkts gleich vertheilt ist, jedoch nur geringen Einfluß auf die Bewegung der Kugel hat.

Tritt nunmehr noch Umdrehung zur fortschreitenden Bewegung eines kugelförmigen Geschosses, dessen Schwerpunkt und Mittelpunkt zusammenfallen, hinzu, so hören zwar allerdings die Umstände, welche um die Richtungslinie der Geschwindigkeit des Mittelpunkts herum Statt finden, auf, unter sich vollkommen gleich zu seyn, aber der Unterschied besteht, da der berührende Widerstand gegen die fortschreitende Bewegung auch bei dem nicht rotirenden Geschosse Statt hat, nur darin, daß nur der berührende Widerstand gegen die Rotationsbewegung hinzukomt, dessen Einwirkung auf die umgebenden Lufttheile an und für sich dieselbe, wie bei einer Kugel ohne fortschreitende Bewegung seyn muß, und welcher somit, da er keine merkliche Bewegung in den berührenden Luftschichten hervorzubringen vermag, das Abfließen der Luft von vorn nach hinten wesentlich weder erschweren noch befördern kann. Hätte die Luft an der ganzen Oberfläche der Kugel gleiche Dichtigkeit, so müßte auch die Wirkung des letztern Widerstandes im ganzen Umfange eines jeden mit der Rotations-Ebene parallelen Kreises dieselbe seyn, und sich daher selbst

gänzlich vernichten; weil aber die Luft an der vordern Halbkugel in Folge der fortschreitenden Bewegung dichter ist als an der hintern, so muß dieser Widerstand auf der einen Seite stärker als auf der andern, und müßte die davon herrührende Ablenkung des Geschoßes, wenn sie je bemerkbar werden könnte, in Übereinstimmung mit der Rechnung (§66), aber im Widerspruche mit der Erfahrung, gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene gerichtet seyn. Es ist daher nicht abzusehen, wie die Umdrehung eine solche Veränderung in der Dichtigkeit und dem Drucke der umgebenden Luft sollte herbeiführen können, daß daraus ein merklicher Einfluß auf die Bahn des Geschoßes hervorgehen könnte. Auch muß bei nicht unterbrochener Stetigkeit der Oberfläche der Ausdruck des normalen Widerstandes $c\frac{nDb}{g}V^2$ mit denselben Werthen von i und n auf den ganzen diesem Widerstande unterworfenen Theil der Oberfläche auch des rotirenden Geschoßes anwendbar seyn, ohne daß die Luftdichtigkeit dabei noch besonders in Rechnung genommen werden darf.

§ 85.

In die im zweiten Kapitel entwickelten Differential-Gleichungen der sogenannten Bewegung eines nicht excentrischen Geschoßes mit sphärischer Oberfläche sind in der Voraussetzung, daß der normale Luftwiderstand dem Quadrate der normalen Geschwindigkeit proportional sey, alle bekannten Bedingungen aufgenommen, von welchen diese Bewegung abhängen kann. Sie enthalten kein auf den normalen Widerstand gegen die Umdrehung bezug habendes Glied, weil bei einem Geschoße dieser Art, von welcher nach §76 es sich hier allein handelt, kein solcher Widerstand Statt hat. Es müßten demnach die durch die Umdrehung thatsächlich entstehenden Abweichungen aus dem berührenden Widerstande gegen die Umdrehung hervorgehen, und daher aus den Gleichungen (O'') des §63, in welchen nur die den Factor c enthaltenden Glieder auf diesen Widerstand sich beziehen, sich ergeben. Allein es ist leicht zu übersehen, daß die Integrale der letztern Gleichungen, welche für $c = 0$ auf die Gleichungen der Bahn eines nicht rotirenden Geschoßes zurückgehen, durch eben diese, verhältnißmäßig sehr kleinen, Glieder keine den Beobachtungen einigermaßen entsprechende Bedeutung gewinnen können.

Ferner mag hier noch bemerkt zu werden verdienen, daß, da die aus den Gleichungen (5) abgeleiteten Integrale, wenn von der Schwerkraft, welche ohne allen Einfluß auf die umdrehende Bewegung eines Geschoßes von der oben bezeichneten Beschaffenheit ist, (§ 64), abgesehen wird, die vollständige Auflösung der diesen Gleichungen zum Grunde liegenden Aufgabe und nichts enthalten, was nicht dem Sinne und den Bedingungen der letztern entspräche, ebenfalls nicht davon die Rede seyn kann, daß irgend ein sogenanntes <u>singuläres Integral</u> zur eigentlichen Lösung des Problems hier Anwendung finden sollte.

Merkwürdig ist der Umstand, daß alle bisherigen Untersuchungen, und zwar sowohl jene über die Bewegung eines exzentrischen kugelförmigen Geschoßes, als auch diejenigen über den normalen Widerstand der Luft gegen unregelmäßige Theile der Oberfläche, so wie jene über den Einfluß des berührenden Widerstandes oder der Luftreibung, aus welchen die oben erwähnten Integrale hervorgegangen sind, ein Resultat, das der Erfahrung geradezu widerspricht, nämlich nur die Möglichkeit einer Abweichung gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene, liefern.

§ 86.

Werden die Ergebnisse der vorangehenden theoretischen Untersuchungen in ihrer Gesammtheit ins Auge gefaßt, so wird man dadurch nothwendig zu der Folgerung geführt, daß die als Folge der Rotation thatsächlich erwiesenen Abweichungen der Geschoße aus den Gesetzen des Widerstandes, welchen die Luft den in ihr sich bewegenden Körpern entgegensetzt, so wie sie die Wissenschaft auf ihrem gegenwärtigen Standpunkte an die Hand gibt, überhaupt sich nicht erklären lassen.

Weil jedoch die Geschoße in ihrer Bewegung mit keiner andern materiellen Substanz als der atmosphärischen Luft in Berührung treten, und irgend ein anderer Stoff, der auf deren Bewegung Einfluß nehmen könnte, nicht denkbar ist, so kann dennoch der Grund dieser Erscheinungen in nichts anderem, als einer Einwirkung der Luft auf die Geschoße,

gesucht werden, und scheint wenigstens so viel angenommen werden zu müssen, daß in derjenigen Bewegung der das Geschoß umgebenden Luftpartikeln, mittelst welcher die durch die fortschreitende Bewegung desselben entstehende ungleiche Dichtigkeit der ihm vorausgehenden und nachfolgenden Luftschichten bei dessen weiterem Fortschreiten wieder ausgeglichen wird, und welche bei dem nicht rotirenden kugelförmigen Geschoße gleichmäßig rings um die Richtungslinie des Mittelpunkts statt findet, durch die hinzutretende Rotation eine Modification solcher Art erzeugt werde, daß auf der einen Seite der durch die Rotations-Achse und die oben genannte Richtungslinie gehenden Ebene die Luft einen stärkern Druck auf das Geschoß ausübt als auf der andern Seite.

Allein worin eigentlich die Ursache, welche eine solche Modification hervorzubringen im Stande ist, und die letztere selbst bestehen, aber dieses läßt sich aus der Natur des Luftwiderstandes, so weit sie bekannt ist, nicht nachweisen, und es ist sogar mit Sicherheit anzunehmen, daß, wenn es auch möglich wäre, die Bewegung der in die Wirkungssphäre des Geschoßes fallenden Lufttheilchen nach den Lehrsätzen der Dynamik in aller Strenge durch den Calcul zu bestimmen, und bis zu gänzlicher Wiederherstellung des Gleichgewichts zwischen denselben zu verfolgen, ohne die Voraussetzung einer andern Einwirkung als jener des Widerstandes, einer weiteren dabei thätig werdenden Kraft, der Causal-Zusammenhang der Erscheinungen aus der Rechnung sich nicht ergeben würde.

Es ist um so auffallender, daß die vielseitigen auf diesen Gegenstand gerichteten Forschungen bis jetzt noch nicht zur Erkenntniß der physikalischen Grundursache der erwähnten Erscheinungen geführt haben, als der in der Ablenkung der Geschoße bestehende Einfluß der Rotation sich in beträchtlich ausgedehntem Maße bemerklich macht, so daß hieraus auf eine sehr wirksame Kraft geschlossen werden muß, und daß selbst vieles für die Vermuthung spricht, daß die Umdrehung der Geschoße die Hauptursache der in der Praxis vorkommenden Abweichungen sey, und daß das, was

bisher mehreren anderen Ursachen, als dem Mangel genauer Rundung, Unebenheiten der Oberfläche, einer von der Seelenachse abweichenden anfänglichen Richtung der Bewegung u.s.w. zugeschrieben worden ist, vielmehr größtentheils nur in der Umdrehung seinen Grund habe. Es ist nämlich vorauszusetzen, daß die Mehrzahl der Geschoße beim Abfeuern theils dadurch, daß die Richtung des im Geschützrohr erhaltenen Stoßes nicht durch den Schwerpunkt geht, theils durch Aufschläge im Rohr und Reibung an den Seelenwänden, neben der fortschreitenden zugleich eine mehr oder weniger starke drehende Bewegung annimmt.

Excentrisch construirte Hohlkugeln (341) gehen regelmäßiger als die gewöhnlichen, deren Aushöhlung und äußerer Umfang gleichen Mittelpunkt haben, weil man durch die Art des Ladens den ersteren eine nach Richtung und Stärke gleichförmigere Umdrehung zu geben im Stande ist als den letzteren. Der gleiche Zweck wird bei den concentrisch construirten Hohlkugeln und den Vollkugeln wegen der geringeren Excentricität des Schwerpunkts mit Hülfe des sogenannten Regulirens im Quecksilberbade weniger vollkommen erreicht, und eben so sind längere Geschützrohre, bei welchen häufigere Kugelanschläge vorkommen und die Wirkung der letztern auf die Umdrehung daher mit jener des excentrischen Stoßes der Geschützladung sich leichter vermengt, für den genannten Zweck weniger geeignet als kürzere.

Die hohe Wichtigkeit des Gegenstandes für die praktische Artillerie fällt in die Augen, so wie überhaupt die Lehre von den Abweichungen der Geschoße und deren Ursachen noch bei weitem nicht so ausgebildet ist, als sie es zu seyn verdient.

Wenn daher bei dem jetzigen Stande der Naturlehre die Lösung der Aufgabe, den physikalischen Erklärungsgrund des Einflusses der Rotation aufzufinden und in die Berechnung der Bahn der Geschoße einzuführen, noch nicht so bald zu hoffen ist, so drängt sich, im Interesse der Wissenschaft sowohl als der Geschützkunst, um so mehr der Wunsch auf, daß die

Gesetze, wonach Umdrehungsgeschwindigkeit, fortschreitende Geschwindigkeit und Ablenkung der Geschosse von einander abhängen, die Hauptbeziehungen, welche zwischen diesen Elementen der Frage Statt finden, soweit es auf dem Wege der Erfahrung möglich ist, faktisch zu erforschen gesucht werden.

Bei den für diesen Zweck anzustellenden Versuchen werden indessen ohne Zweifel ebenfalls, hauptsächlich sofern es sich um die Bestimmung der Umdrehungsgeschwindigkeit handelt, nicht geringe Schwierigkeiten zu überwinden seyn. Die Berechnung der anfänglichen Umdrehungsgeschwindigkeit läßt sich aus der bekannten Excentricität des Geschosses, aus den weiteren bekannten Abmessungen und der Anfangsgeschwindigkeit desselben durch das im §41 angewendete Verfahren zwar bewerkstelligen; allein da diese Methode nicht nur alle die bekannten Mängel in sich aufnimmt, denen die Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit unterliegt, sondern noch aus anderen augenfälligen Gründen nicht die gehörige Sicherheit verspricht, so wäre jedenfalls eine praktische Messung, wenn sie, wozu wenigstens einige Hoffnung vorhanden ist, bei planmäßigem und beharrlichem Streben sich als ausführbar zeigen sollte, vorzuziehen. Wenn nämlich, wie sich voraussehen läßt, das Mittel, die Umdrehungsgeschwindigkeit durch Zählen der Umläufe eines brennenden Zünders in der Dunkelheit unmittelbar zu messen, nur bei langsamer Rotation Anwendung gestatten sollte, so möchte es dagegen bei schneller Rotation eher möglich seyn, diese Geschwindigkeit aus der Tonhöhe der Luftschwingungen, welche das offene Mundloch eines rotirenden Hohlgeschosses bei ungefähr winkelrechter Lage der Mundlochachse gegen die Rotationsachse erzeugt, mit Hülfe des Gehörs mit einiger Sicherheit zu bestimmen.

Um einen etwaigen Einfluß der Materie des Geschosses auf die Erscheinungen zu ermitteln, dürfte es ferner von Nutzen seyn, auch Geschosse von Bronze, Stein ꝛc. bei den Versuchen zu verwenden.

Vielleicht dürfte es selbst gelingen, durch Erweiterung und Auf-

Klärung des Feldes der Erfahrungen auch über das Gebiet der Theorie mehr Licht zu verbreiten, und durch genauere Ermittelung des Thatbestandes der Erscheinungen dem als Hauptursache dabei thätigen Grundprincip näher auf die Spur zu kommen.

Anhang I.

Einrichtung und Gebrauch der Excentricitäts-Wage.

Die Excentricitätswage (Fig. 8) dient, den Abstand des Schwerpunkts eines kugelförmigen Geschosses von seinem Mittelpunkte und die Lage des durch den Schwerpunkt gehenden Durchmessers durch Wägung (ohne Quecksilber) zu bestimmen.

An dem einen, etwas verkürzten, Arme einer gewöhnlichen Krämerwage ist, statt der Wagschale, vermittelst der Hülse E und Schraube F das Lager für das Geschoß in fester Verbindung so angebracht, daß die Ebene des äußern Randes des Kugelringes R durch den Punkt b, an dessen Stelle der Aufhängepunkt der Wagschale dieses Armes sich befand, geht, und senkrecht auf der durch die Aufhängepunkte beider Arme gehenden geraden Linie ab steht.

Das Geschoß ruht auf diesem äußern Rande des Kugelringes, dessen Durchmesser um etwa eine Linie größer ist als jener des Geschosses, und auf dem Stützbogen G, der mittelst seiner Schraube so gestellt werden kann, daß der diesen Rand unten berührende größte Kreis des Geschosses auch oben in die Ebene desselben fällt.

Der Steg H wird, zum Behuf der Prüfung der Wage, in der Verlängerung des Wagebalkens mit der Schraube K an diesem so be-

festigt, daß der Nullpunkt des Steges ebenfalls in die genannte Ebene des äußern Randes des Kugelringes fällt.

Beim Gebrauche der Excentricitätswage ist folgendes Verfahren zu beobachten:

1) Vor jedesmaligem Gebrauche hat man die Genauigkeit der Wage und die richtige Stellung des Lagers für das Geschoß sorgfältig zu prüfen.

Man legt den Steg ein, bringt die Wage durch Gewichte, welche man in die Wagschale legt, ins Gleichgewicht und hängt dann irgend ein bekanntes Gewicht, z. B. 1 Pfund, an den Nullpunkt des Steges. Ist die Wage genau, so muß, wenn man dasselbe Gewicht in die Schale zulegt, das Gleichgewicht vollkommen wieder hergestellt werden.

Wird hierauf irgend ein Gewicht G in einem bekannten Abstande l vom Kugelring am Stege aufgehängt, und ist das Gewicht $G + g$ in der Schale zum Gleichgewicht nöthig, so ergibt sich die Länge L eines Armes des Wagebalkens aus der Proportion:

$$L : l = G : g$$

2) Auf der Oberfläche des Geschosses, dessen Excentricität gefunden werden soll, müssen drei größte Kreise, welche genau winkelrecht auf einander stehen, übrigens jede beliebige Lage haben können, durch feine Umrisse, oder auch nur durch ihre Durchschnittspunkte, bezeichnet seyn. Von den sechs Durchschnittspunkten der drei Kreise werden drei, die je um einen rechten Winkel von einander abstehen, mit X, Y, Z bezeichnet.

Das absolute Gewicht p des Geschosses wird, indem man dieses in die Wagschale und ein anderes Geschoß von gleichem Caliber in das Kugellager legt, und nach ausgeglichener Wage das erstere mit Gewichten vertauscht, oder auch durch Abwägen auf einer gewöhnlichen Wage, genau bestimmt.

3) Nachdem die Excentricitätswage ohne Steg ins Gleichgewicht gebracht ist, wird das Gewicht p in die Schale, und das Geschoß mit Hülfe des Stützbogens so in den Kugelring gelegt, daß der größte Kreis YZ in die Ebene

des äußern Randes des letztern, und der Punkt X auf die von der Schale abgekehrte Seite, fällt. Man wiegt dann genau ab, und bemerkt die Größe $\frac{p}{P}L = x$ mit positivem Zeichen, wenn das Gewicht p in der Schale zugelegt werden mußte, und mit negativem Zeichen, wenn es weggenommen werden mußte.

Eben so wird, nachdem der größte Kreis XZ, so daß der Punkt Y nach außen fällt, in den Kugelring gelegt ist, abgewogen, und die gefundene Größe $\frac{p'}{P}L = y$, und hierauf die aus der Wägung mit dem größten Kreise XY sich ergebende Größe $\frac{p''}{P}L = z$, mit positivem oder negativem Zeichen bemerkt.

Hieraus findet sich sofort die Excentricität

$$e = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{L}{P}\sqrt{p^2+p'^2+p''^2}.$$

4) Soll die Lage des Durchmessers, in welchem der Schwerpunkt liegt, oder der beiden Pole desselben, bestimmt werden, so bezeichne man noch die den Durchschnittspunkten X, Y, Z gegenüberliegenden Punkte mit X′, Y′, Z′, und bestimme vorerst den größten Kreis, welcher, senkrecht auf dem größten Kreise XY, durch den Schwerpunkt geht. Wird zu diesem Behufe aus $\frac{y}{x}$ oder $\frac{p'}{p} = \operatorname{tg} m$, ohne Rücksicht auf die Zeichen von x und y, der Winkel m berechnet, und die Größe $D.\sin\frac{1}{2}m$, in welcher D den Durchmesser des Geschosses bedeutet, als Sehne im größten Kreise XY (Fig. 9), und zwar

von X aus gegen Y, wenn x und y positiv sind,
von X′ aus gegen Y′, wenn x und y negativ sind,
von X aus gegen Y′, wenn x positiv, y negativ ist,
von X′ aus gegen Y, wenn x negativ, y positiv ist,

aufgetragen, so ist, wenn K den zweiten Endpunkt der Sehne bezeichnet, KZ der gesuchte größte Kreis, und zwar liegen in diesem größten Kreise der Schwerpunkt und der Punkt K auf derselben Seite des auf der Ebene XY senkrechten Durchmessers ZZ′. Sollten x und y zugleich gleich Null seyn, in welchem Falle der Winkel m unbestimmt bliebe, so würde der Schwerpunkt im Durchmesser ZZ′ selbst liegen.

Wird hierauf ferner, ohne Rücksicht auf das Zeichen, aus $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ oder

$\frac{p''}{\sqrt{p^2+p'^2}} = \operatorname{tg} w$ der Winkel w berechnet und die Größe $d.\sin\frac{1}{2}w$ als Bogen im größten Kreise KZ (Fig. 10)

von K aus gegen Z, wenn z positiv ist,

von K aus gegen Z', wenn z negativ ist,

aufgetragen, so bezeichnet der zweite Endpunkt S der Bogen den sogenannten schweren Pol, und es ergibt sich hieraus von selbst die Lage des sogenannten leichten Pols.(*)

Anhang II

Die Auflösung des ballistischen Problems ohne Rücksicht auf Rotation betreffend.

§1.

Die Gleichungen der Flugbahn eines nicht rotirenden kugelförmigen Geschosses sind, wenn der dessen Bewegung verzögernde berührende Luft-Widerstand (§58) außer Acht bleibt, nach §23 folgende:

(*) Höchst selten wird man ein Geschoß finden, das genau kugelrund ist. Findet man aber (mit Hülfe einer Lehre oder der Drehbank) eine, auch nur schmale, regelmäßige Zone um die Mitte des Geschosses, so lassen sich immer ein Kreis in dieser Zone, welcher z. B. der Kreis XY sey, und dessen beide Pole Z, Z' so bestimmen, daß die Abstände der Pole von diesem Kreise unter sich gleich, wenn auch von den vier Abständen XY, XY', X'Y, X'Y' verschieden, sind; und so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von dem Mittelpunkt der Zone als Excentricität.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -n\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial x}{\partial t}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g - n\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\frac{\partial z}{\partial t}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Der diese Bahn beschreibende Schwerpunkt des Geschosses ist hier als mit dem Mittelpunkte zusammenfallend, und seine Bewegung in der durch die Richtung seiner Anfangsgeschwindigkeit gehenden Vertikalebene, auf deren beiden Seiten alle Umstände als vollkomen gleich vorausgesetzt werden, vollführend gedacht. Als Achse der z ist die Vertikallinie durch den Anfangspunkt der Bahn, als Achse der x die in der genannten Vertikalebene liegende Horizontallinie durch diesen Punkt, angenommen, so zwar, daß die positiven z von unten nach oben, die positiven x nach derselben Seite jener Vertikalen, auf welcher die Richtungslinie der Anfangsgeschwindigkeit sich befindet, gehen (§1). Die Zeichen i und n haben die Bedeutung wie im §23, g aber ist in der für g' (§5) festgesetzten Bedeutung genommen.

Die vom Anfangspunkt gerechnete Bogenlänge s der Bahn ist mit der Zeit t fortwährend zunehmend, und die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ daher immer als positiv zu betrachten.

Um aus den Gleichungen (1) und (2) eine Gleichung der Bahn zwischen den Coordinaten z und x abzuleiten, und zu diesem Ende statt t die Coordinate x als unabhängige Veränderliche einzuführen, hat man in jenen Gleichungen

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial x}{\partial t},\quad -\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-3} \text{ statt } \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-3} \text{ statt } \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \text{ und } \frac{\partial s}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial s}{\partial t}$$

zu setzen, und erhält hierdurch

aus (1) $$\frac{\partial t}{\partial x}\,\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = n\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{4-i},$$

aus (2) mit Hülfe von (1)

$$-\frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Aus der letzteren Gleichung folgt

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 2\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 2p\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{4-i},$$

und durch Elimination von $\frac{\partial t}{\partial x}$ mittelst eben dieser Gleichung (3)

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 2p\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} \ldots\ldots (4)$$

Die Gleichungen (1) und (2) sind nunmehr durch die gleichbedeutenden, wenn auch der Form nach verschiedenen, Gleichungen (3) und (4) ersetzt, und man kann bemerken, daß, so wie in jenen Gleichungen, auch in der Gleichung (4) der zur rechten Seite des Gleichheitszeichens stehende Theil derselben als ein Aggregat mehrerer Glieder mit verschiedenen, ganzen oder gebrochenen, Werthen von i, zu deren jedem ein besonderer Werth von p gehört, sich denken läßt (§15). Bei den folgenden Entwickelungen wird man sich jedoch begnügen, die Zeichen i und p in der Gleichung (4) als nur eindeutig, oder den rechts stehenden Theil als aus einem einzigen Gliede bestehend, zu betrachten.(*)

§2.

Es sey α der spitze Winkel, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der Achse der x bildet, und derselbe werde als positiv oder als negativ betrachtet, je nachdem er vom positiven Theil dieser Achse aus sich nach oben oder nach unten erstreckt. Man setze

$$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha - g(X_1 + gX_2 + g^2X_3 \ldots),$$

so daß $X_1, X_2, X_3 \ldots$ zu bestimmende Funktionen von x sind, welche mit x zugleich verschwinden. Dadurch wird

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial X_1}{\partial x} + g\frac{\partial X_2}{\partial x} + \ldots,$$

und vermöge der Gleichung (3) müssen, wenn $x = 0$ ist, $\frac{\partial X_1}{\partial x}$ gleich $\left(\frac{1}{F\cos\alpha}\right)^2$, wo

(*) Die Gleichung (4) findet sich unter der Voraussetzung, daß der Exponent i zumal die beiden Werthe 2 und 4 habe, in
Bouvroy, Leitfaden zum Unterricht in der Mathematik, 1837.
behandelt.

f die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, $\frac{\partial X_2}{\partial x}$, $\frac{\partial X_3}{\partial x}$ etc. aber ebenfalls gleich Null seyn.(*)

Man erhält ferner

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + g\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \ldots\ldots,$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - 2\,tg\,\alpha . X_1 . g + (X_1^2 - 2\,tg\,\alpha . X_2)\,g^2 \ldots\ldots,$$

und nach den polynomischen Formeln des § 29 (Cap. I)

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1} \text{ oder } \left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{i-1}{2}} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1} - (i-1)\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-2} X_1 . g + \frac{i-1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-3}\left((1+(i-3)\sin^2\alpha)X_1^2 - 2\,tg\,\alpha . X_2\right) g^2 \ldots,$$

$$\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}} + \frac{4-i}{2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}}\frac{\partial X_2}{\partial x} . g + \frac{4-i}{2}\left(\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}}\frac{\partial X_3}{\partial x} + \frac{2-i}{4}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)^2\right) g^2 \ldots,$$

daher

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}} + \left(\frac{4-i}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}} . \frac{\partial X_2}{\partial x} - (i-1)\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}} . X_1\right) g$$

$$+ \left(\frac{4-i}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}}\frac{\partial X_3}{\partial x} + \frac{(4-i)(2-i)}{2.4}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)^2 - (i-1)\frac{4-i}{2}\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}} X_1\frac{\partial X_2}{\partial x}\right.$$

$$\left. + \frac{i-1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-3}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}}\left((1+(i-3)\sin^2\alpha)X_1^2 - 2\,tg\,\alpha . X_2\right)\right) g^2 + \ldots$$

Da nun die Gleichungen (3) und (4), so wie (1) und (2), für jeden Werth von g gelten müssen, so zerfällt die Gleichung (4), indem man sie auf Null bringt, in folgende Theilgleichungen:

1) $\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} = 2p\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}}$;

2) $\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} = (4-i)p\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}}\frac{\partial X_2}{\partial x} - 2(i-1)p\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}} . X_1$;

3) $\frac{\partial^2 X_3}{\partial x^2} = (4-i)p\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}} . \frac{\partial X_3}{\partial x} + \frac{2-i}{2} . \frac{4-i}{2}p\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)^2 - (i-1)(4-i)p\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}} X_1\frac{\partial X_2}{\partial x}$

$+ (i-1)p\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-3}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}}\left((1+(i-3)\sin^2\alpha)X_1^2 - 2\,tg\,\alpha . X_2\right)$;

u. s. w.

(*) Aus der Gleichung (4) ergibt sich durch Integration

$$\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^{\frac{i-2}{2}} = (i-2)p\int\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}\partial x + \left(\frac{1}{f\cos\alpha}\right)^{i-2},$$

wo $\int\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}\partial x$ als mit x verschwindend zu nehmen ist. Aus der letzteren Gleichung wird zwar die Entwickelung der Coefficienten X_1, X_2 etc. etwas einfacher, dagegen hat die unmittelbare Entwickelung aus der Gleichung (4) den Vorzug, von allgemeinerer Anwendung zu seyn.

Die Theilgleichung 1) gibt durch Integration, indem man die Constante so bestimmt, daß $\frac{\partial X_1}{\partial x}$ gleich $\left(\frac{1}{f\cos\alpha}\right)^2$ wird für $x=0$,

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{i-2}{2}} = (i-2)pn\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\cdot x + \left(\frac{1}{f\cos\alpha}\right)^{i-2} = \left(\frac{1}{f\cos\alpha}\right)^{i-2}\left(1+(i-2)pnf^{i-2}\cdot\frac{x}{\cos\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = \left(\frac{1}{f\cos\alpha}\right)^2\left(1+(i-2)pnf^{i-2}\cdot\frac{x}{\cos\alpha}\right)^{\frac{2}{i-2}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $1+(i-2)pnf^{i-2}\frac{x}{\cos\alpha}=\xi$, wodurch

$$\frac{(i-2)pnf^{i-2}}{\cos\alpha}\partial x = \partial\xi \text{ und } \partial x = \frac{\cos\alpha}{(i-2)pnf^{i-2}}\partial\xi \text{ wird,}$$

so hat man

$$\partial X_1 = \frac{1}{(i-2)pnf^i\cos\alpha}\xi^{\frac{2}{i-2}}\partial\xi, \text{ und erhält hieraus } X_1 = \frac{1}{ipnf^i\cos\alpha}\left(\xi^{\frac{i}{i-2}}-1\right),$$

so wie aus $X_1\partial x = \frac{1}{i(i-2)pn^2f^{2i-2}}\left(\xi^{\frac{i}{i-2}}-1\right)\partial\xi$ ferner $\int X_1\partial x = \frac{1}{i(i-2)pn^2f^{2i-2}}\left(\frac{i-2}{2(i-1)}\xi^{\frac{2i-2}{i-2}}-\xi+\frac{i}{2(i-1)}\right)$.

In der Theilgleichung 2) ist der Factor $(4-i)pn\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}}$ des ersten Gliedes rechts vom Gleichheitszeichen gleich $\frac{(4-i)pn}{f^{2-i}\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\xi}$. Wird daher zum Behuf der Integration zuerst

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} = (4-i)pn\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x} \text{ oder } \frac{\partial^2 X_2}{\partial x} = \frac{4-i}{i-2}\frac{\partial\xi}{\xi}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x}$$

gesetzt, so erhält man nach der Methode der Variation der Constanten

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} = C_2\cdot\xi^{\frac{4-i}{i-2}}, \text{ und } \frac{\partial C_2}{\partial x}\cdot\xi^{\frac{4-i}{i-2}} = -2(i-1)pn\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-2}\cdot\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}}\cdot X_1,$$

oder, da $\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^{\frac{4-i}{2}} = \left(\frac{1}{f\cos\alpha}\right)^{4-i}\cdot\xi^{\frac{4-i}{i-2}}$ ist, $\frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{2(i-1)pn\sin\alpha}{f^{4-i}\cdot\cos^2\alpha}\cdot X_1$,

somit C_2, welches mit $\frac{\partial X_2}{\partial x}$ oder x zugleich verschwinden muß,

$$= -\frac{2(i-1)pn\sin\alpha}{f^{4-i}\cos^2\alpha}\int X_1\partial x = -\frac{\sin\alpha}{ipnf^{i+2}\cos^2\alpha}\left(\xi^{\frac{2i-2}{i-2}}-\frac{2(i-1)}{i-2}\xi+\frac{i}{i-2}\right),$$

und $\frac{\partial X_2}{\partial x} = -\frac{\sin\alpha}{ipnf^{i+2}\cos^2\alpha}\left(\xi^{\frac{i+2}{i-2}}-2\frac{i-1}{i-2}\xi^{\frac{2}{i-2}}+\frac{i}{i-2}\xi^{\frac{4-i}{i-2}}\right)$,

woraus sofort

$$X_2 = -\frac{\sin\alpha}{ipn^2f^{2i}\cos\alpha}\left(\frac{1}{2i}\xi^{\frac{2i}{i-2}}-\frac{2(i-1)}{i(i-2)}\xi^{\frac{i}{i-2}}+\frac{i}{2(i-2)}\xi^{\frac{2}{i-2}}-\frac{i-1}{2i}\right),$$

und $\int X_2\partial x = -\frac{\sin\alpha}{ipn^3f^{3i-2}}\left(\frac{1}{2i(3i-2)}\xi^{\frac{3i-2}{i-2}}-\frac{1}{i(i-2)}\xi^{\frac{2i-2}{i-2}}+\frac{1}{2(i-2)}\xi^{\frac{i}{i-2}}-\frac{i-1}{2i(i-2)}\xi+\frac{1}{(i-2)(3i-2)}\right)$

folgen.

Auf demselben Wege gibt die Theilgleichung 3)

$\frac{\partial X_3}{\partial x} = C_3 . \xi^{\frac{4-i}{i-2}}$, und $\frac{\partial C_3}{\partial x} = \frac{i-1}{i^2 p f^{i+4} \cos^3\alpha}\left(\xi^{\frac{2i}{i-2}} - 2\xi^{\frac{i}{i-2}} + 1\right)$

$$+ \frac{\sin^2\alpha}{i p f^{i+4}\cos^3\alpha}\left(\frac{i+2}{4}\xi^{\frac{2i}{i-2}} - \frac{4(i-1)}{i-2}\xi^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i(i+2)}{2(i-2)}\xi^{\frac{2}{i-2}} - \frac{(i-1)(i-3)}{i-2} - \frac{i(4-i)}{4(i-2)}\xi^{-2}\right),$$

somit $C_3 = \frac{i-1}{i^2 p^2 f^{2i+2}\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{3i-2}\xi^{\frac{3i-2}{i-2}} - \frac{1}{i-1}\xi^{\frac{2i-2}{i-2}} + \frac{1}{i-2}\xi - \frac{i^2}{(i-1)(i-2)(3i-2)}\right)$

$$+ \frac{\sin^2\alpha}{i p^2 f^{2i+2}\cos^2\alpha}\left(\frac{i+2}{4(3i-2)}\xi^{\frac{3i-2}{i-2}} - \frac{2}{i-2}\xi^{\frac{2i-2}{i-2}} + \frac{i+2}{2(i-2)}\xi^{\frac{i}{i-2}} - \frac{(i-1)(i-3)}{(i-2)^2}\xi + 2\frac{i^3-5i^2+5i-2}{(i-2)^2(3i-2)} + \frac{i(4-i)}{4(i-2)^2}\xi^{-1}\right)$$

und $\frac{\partial X_3}{\partial x} = \frac{1}{i^2 p^2 f^{2i+2}\cos^2\alpha}\left(\frac{i-1}{3i-2}\xi^{\frac{2i+2}{i-2}} - \xi^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{i-1}{i-2}\xi^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i^2}{(i-2)(3i-2)}\xi^{\frac{4-i}{i-2}}\right)$

$$+ \frac{\sin^2\alpha}{i p^2 f^{2i+2}\cos^2\alpha}\left(\frac{i+2}{4(3i-2)}\xi^{\frac{2i+2}{i-2}} - \frac{2}{i-2}\xi^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{i+2}{2(i-2)}\xi^{\frac{4}{i-2}} - \frac{(i-1)(i-3)}{(i-2)^2}\xi^{\frac{2}{i-2}} + 2\frac{i^3-5i^2+5i-2}{(i-2)^2(3i-2)}\xi^{\frac{4-i}{i-2}} + \frac{i(4-i)}{4(i-2)^2}\xi^{\frac{6-2i}{i-2}}\right),$$

woraus ferner

$$X_3 = \frac{1}{i p^3 f^{3i}\cos\alpha}\left(\frac{i-1}{3i^2(3i-2)}\xi^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{1}{2i^2}\xi^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{i-1}{i^2(i-2)}\xi^{\frac{i}{i-2}} - \frac{i}{2(i-2)(3i-2)}\xi^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i-1}{6i^2}\right)$$

$$+ \frac{\sin^2\alpha}{i p^3 f^{3i}\cos\alpha}\left(\frac{i+2}{12i(3i-2)}\xi^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{1}{i(i-2)}\xi^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{1}{2(i-2)}\xi^{\frac{i+2}{i-2}} - \frac{(i-1)(i-3)}{i(i-2)^2}\xi^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i^3-5i^2+5i-2}{(i-2)^2(3i-2)}\xi^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i}{4(i-2)^2}\xi^{\frac{4-i}{i-2}} - \frac{i-1}{3i}\right),$$

und $\int X_3 \partial x = \frac{1}{i p^4 f^{4i-2}}\left(\frac{i-1}{6i^2(2i-1)(3i-2)}\xi^{\frac{4i-2}{i-2}} - \frac{1}{2i^2(3i-2)}\xi^{\frac{3i-2}{i-2}} + \frac{1}{2i^2(i-2)}\xi^{\frac{2i-2}{i-2}} - \frac{1}{2(i-2)(3i-2)}\xi^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i-1}{6i^2(i-2)}\xi - \frac{1}{2(i-2)(2i-1)(3i-2)}\right)$

$$+ \frac{\sin^2\alpha}{i p^4 f^{4i-2}}\left(\frac{i+2}{24i(2i-1)(3i-2)}\xi^{\frac{4i-2}{i-2}} - \frac{1}{i(i-2)(3i-2)}\xi^{\frac{3i-2}{i-2}} + \frac{1}{4i(i-2)}\xi^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{i-3}{2i(i-2)^2}\xi^{\frac{2i-2}{i-2}} + \frac{i^3-5i^2+5i-2}{i(i-2)^2(3i-2)}\xi^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i}{8(i-2)^2}\xi^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i-1}{3i(i-2)}\xi - \frac{3i^3-14i^2+9i-2}{4i(i-2)(2i-1)(3i-2)}\right)$$

hervorgehen, u. s. w.

Man hat demnach auch

$$z = tg\alpha . x - g\left(\int X_1 \partial x + g\int X_2 \partial x + g^2\int X_3 \partial x + \ldots\ldots\right).$$

§ 3.

Der Fall $i = 2$, auf welchen die für X_1, X_2 &c. gefundenen Ausdrücke ihrer Form nach unanwendbar sind, erfordert eine besondere Entwicklung.

Die Gleichung (4) ist in diesem Falle

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 2p\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Indem man $\frac{\partial z}{\partial x}$ ebenfalls gleich $tg\alpha - g(X_1 + gX_2 + \ldots)$ annimmt, so wird

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha . X_1 g + \left(\tfrac{1}{2}\cos^3\alpha . X_1^2 - \sin\alpha . X_2\right)g^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos^4\alpha . X_1^3 + \cos^3\alpha X_1 X_2 - \sin\alpha . X_3\right)g^3 \ldots,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{\cos\alpha}.\frac{\partial X_1}{\partial x} + \left(\frac{1}{\cos\alpha}.\frac{\partial X_2}{\partial x} - \sin\alpha.\frac{\partial X_1}{\partial x}X_1\right)g + \left(\frac{1}{\cos\alpha}.\frac{\partial X_3}{\partial x} - \sin\alpha\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}X_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x}X_2\right) + \tfrac{1}{2}\cos^3\alpha.\frac{\partial X_1}{\partial x}X_1^2\right)g^2$$

$$+ \left(\frac{1}{\cos\alpha}.\frac{\partial X_4}{\partial x} - \sin\alpha\left(\frac{\partial X_3}{\partial x}X_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x}X_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x}X_3\right) + \cos^3\alpha\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial X_2}{\partial x}X_1^2 + \frac{\partial X_1}{\partial x}X_1 X_2\right) + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos^4\alpha.\frac{\partial X_1}{\partial x}X_1^3\right)g^3 \ldots,$$

und es ergeben sich die Theilgleichungen wie folgt:

1, $\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} = \frac{2p}{\cos\alpha}.\frac{\partial X_1}{\partial x}$;

$$2)\ \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} = \frac{2p}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x} - 2p\sin\alpha\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x}X_1\ ;$$

$$3)\ \frac{\partial^2 X_3}{\partial x^2} = \frac{2p}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x} - 2p\sin\alpha\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}X_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x}X_2\right) + p\cos^2\alpha\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x}X_1^2\ ;$$

$$4)\ \frac{\partial^2 X_4}{\partial x^2} = \frac{2p}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial X_4}{\partial x} - 2p\sin\alpha\left(\frac{\partial X_3}{\partial x}X_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x}X_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x}X_3\right) + p\cos^2\alpha\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}X_1^2 + 2\frac{\partial X_1}{\partial x}X_1X_2\right) + p\sin\alpha\cos^4\alpha\cdot\frac{\partial X_1}{\partial x}X_1^3;$$

u. s. w.

Aus 1) findet sich, indem man die Grundzahl der natürlichen Logarithmen mit e bezeichnet, und die Constante der Integration eben so wie im vorigen § aus der Gleichung (3) bestimmt,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = \left(\frac{1}{f\cos\alpha}\right)^2\cdot e^{\frac{2px}{\cos\alpha}}.$$

Wird zur Abkürzung $\frac{2px}{\cos\alpha} = \xi$ gesetzt, so daß $\partial\xi = \frac{2p}{\cos\alpha}\partial x$, $\partial x = \frac{\cos\alpha}{2p}\partial\xi$ ist, so wird

$$\partial X_1 = \frac{1}{2pf^2\cos\alpha}e^{\xi}\partial\xi,\quad X_1 = \frac{1}{2pf^2\cos\alpha}(e^{\xi}-1)\ \text{und}\ \int X_1\partial x = \frac{1}{4p^2f^2}(e^{\xi}-\xi-1).$$

Die Theilgleichung 2) gibt durch die im Vorigen angewandte Integrationsmethode

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} = C_2\cdot e^{\xi}\ \text{und}\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = -\frac{\sin\alpha}{f^4\cos^2\alpha}(e^{\xi}-1),\ \text{daher}\ C_2 = -\frac{\sin\alpha}{2pf^4\cos^2\alpha}(e^{\xi}-\xi-1),$$

oder

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} = -\frac{\sin\alpha}{2pf^4\cos^2\alpha}\left(e^{2\xi}-(\xi+1)e^{\xi}\right),\quad X_2 = -\frac{\sin\alpha}{4p^2f^4\cos\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\xi}-\xi e^{\xi}-\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\text{und}\ \int X_2\partial x = -\frac{\sin\alpha}{8p^3f^4}\left(\tfrac{1}{4}e^{2\xi}-\xi e^{\xi}+e^{\xi}-\tfrac{1}{2}\xi-\tfrac{5}{4}\right).$$

Eben so ergibt sich aus 3)

$$\frac{\partial X_3}{\partial x} = C_3\cdot e^{\xi}\ \text{und}\ \frac{\partial C_3}{\partial x} = \frac{1}{2pf^6\cos^3\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\xi}-e^{\xi}+\tfrac{1}{2}\right)+\frac{\sin^2\alpha}{2pf^6\cos^3\alpha}\left(e^{2\xi}-(2\xi+1)e^{\xi}+\xi\right),$$

somit

$$C_3 = \frac{1}{4p^2f^6\cos^2\alpha}\left(\tfrac{1}{4}e^{2\xi}-e^{\xi}+\tfrac{1}{2}\xi+\tfrac{3}{4}\right)+\frac{\sin^2\alpha}{4p^2f^6\cos^2\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\xi}-(2\xi-1)e^{\xi}+\tfrac{1}{2}\xi-\tfrac{3}{2}\right),$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x} = \frac{1}{4p^2f^6\cos^2\alpha}\left(\tfrac{1}{4}e^{3\xi}-e^{2\xi}+\left(\tfrac{1}{2}\xi+\tfrac{3}{4}\right)e^{\xi}\right)+\frac{\sin^2\alpha}{4p^2f^6\cos^2\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{3\xi}-(2\xi-1)e^{2\xi}+\left(\tfrac{1}{2}\xi^2-\tfrac{3}{2}\right)e^{\xi}\right),$$

$$X_3 = \frac{1}{8p^3f^6\cos\alpha}\left(\tfrac{1}{12}e^{3\xi}-\tfrac{1}{2}e^{2\xi}+\left(\tfrac{1}{2}\xi+\tfrac{1}{4}\right)e^{\xi}+\tfrac{1}{6}\right)+\frac{\sin^2\alpha}{8p^3f^6\cos\alpha}\left(\tfrac{1}{6}e^{3\xi}-(\xi-1)e^{2\xi}+\left(\tfrac{1}{2}\xi^2-\xi-\tfrac{1}{2}\right)e^{\xi}-\tfrac{2}{3}\right),$$

$$\int X_3\partial x = \frac{1}{16p^4f^6}\left(\tfrac{1}{36}e^{3\xi}-\tfrac{1}{4}e^{2\xi}+\left(\tfrac{1}{2}\xi-\tfrac{1}{4}\right)e^{\xi}+\tfrac{1}{6}\xi+\tfrac{17}{36}\right)+\frac{\sin^2\alpha}{16p^4f^6}\left(\tfrac{1}{18}e^{3\xi}-\left(\tfrac{1}{2}\xi-\tfrac{3}{4}\right)e^{2\xi}+\left(\tfrac{1}{2}\xi^2-2\xi+\tfrac{3}{2}\right)e^{\xi}-\tfrac{2}{3}\xi-\tfrac{83}{36}\right).$$

So erhält man ferner aus der Theilgleichung 4)

$$\frac{\partial X_4}{\partial x} = -\frac{\sin\alpha}{8p^3f^8\cos^2\alpha}\left(\tfrac{5}{18}e^{4\xi}-\tfrac{3}{4}(\xi+1)e^{3\xi}+3\left(\xi-\tfrac{3}{2}\right)e^{2\xi}-\left(\tfrac{1}{2}\xi^2+\tfrac{1}{12}\xi-\tfrac{71}{36}\right)e^{\xi}\right)$$
$$-\frac{\sin^3\alpha}{8p^3f^8\cos^2\alpha}\left(\tfrac{2}{9}e^{4\xi}-\tfrac{3}{2}(\xi-1)e^{3\xi}+\left(2\xi^2-4\xi+1\right)e^{2\xi}-\left(\tfrac{1}{6}\xi^3-\tfrac{1}{2}\xi^2-\tfrac{5}{6}\xi+\tfrac{49}{18}\right)e^{\xi}\right),$$

$$X_4 = -\frac{\sin\alpha}{16 p^4 f^8 \cos\alpha}\left(\frac{5}{72}e^{4\xi} - \left(\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{6}\right)e^{3\xi} + \frac{3}{2}(\xi - 1)e^{2\xi} - \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{11}{12}\xi - \frac{19}{18}\right)e^{\xi} + \frac{13}{24}\right)$$

$$-\frac{\sin^3\alpha}{16 p^4 f^8 \cos\alpha}\left(\frac{1}{18}e^{4\xi} - \left(\frac{1}{2}\xi - \frac{2}{3}\right)e^{3\xi} + (\xi^2 - 3\xi + 2)e^{2\xi} - \left(\frac{1}{6}\xi^3 - \xi^2 + \frac{7}{6}\xi + \frac{14}{9}\right)e^{\xi} - \frac{7}{6}\right),$$

$$\int X_4 \partial x = -\frac{\sin\alpha}{32 p^5 f^8}\left(\frac{5}{288}e^{4\xi} - \frac{1}{12}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)e^{3\xi} + \frac{3}{4}\left(\xi - \frac{3}{2}\right)e^{2\xi} - \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \frac{23}{6}\xi + \frac{31}{18}\right)e^{\xi} + \frac{13}{24}\xi + \frac{575}{288}\right)$$

$$-\frac{\sin^3\alpha}{32 p^5 f^8}\left(\frac{1}{72}e^{4\xi} - \frac{1}{6}\left(\xi - \frac{5}{3}\right)e^{3\xi} + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - 2\xi + 2\right)e^{2\xi} - \left(\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{25}{6}\xi - \frac{47}{18}\right)e^{\xi} - \frac{7}{6}\xi - \frac{353}{72}\right),$$

u. s. w. f.

§4.

Nachdem die Coefficienten $X_1, X_2 \ldots \int X_1 \partial x, \int X_2 \partial x \ldots$ als Functionen von x entwickelt sind, hat man als solche Function auch die der Coordinate x entsprechende Bogenlänge s der Flugbahn oder

$$\int \frac{\partial s}{\partial x}\partial x = \frac{1}{\cos\alpha}x - g\sin\alpha . \int X_1 \partial x + g^2\left(\frac{1}{2}\cos^3\alpha . \int X_1^2 \partial x - \sin\alpha . \int X_2 \partial x\right) \ldots,$$

und findet ferner mittelst der Gleichung (3)

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial X_1}{\partial x} + g\frac{\partial X_2}{\partial x} + g^2\frac{\partial X_3}{\partial x} + \ldots},$$

sowie auch aus

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + g\frac{\partial X_2}{\partial x} + g^2\frac{\partial X_3}{\partial x} + \ldots\right)^{\frac{1}{2}}$$

durch weitere Entwickelung die Zeit t, ebenfalls als Funktion von x, sich bestimmen läßt.

So wie durch den vorangehenden Calcul die vertikale Coordinate z in der horizontalen x ausgedrückt worden ist, läßt sich, indem man jene Coordinate als unabhängige Veränderliche in die Gleichungen einführt, umgekehrt auch x in z ausdrücken.

Um dieses zu bewerkstelligen, hat man in den Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{\partial t}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial t}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-3} \text{ statt } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad -\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-4} + 3\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-5} \text{ statt } \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

zu setzen, und erhält hierdurch die weitern Gleichungen:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\frac{\partial x}{\partial z} = 3\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2 + 2n\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} \ldots\ldots (6),$$

durch welche die ihnen gleichbedeutenden Gleichungen (1) und (2) nun ebenfalls als ersetzt betrachtet werden können. Auch kann in der Gleichung (6) das zweite Glied des rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theils als ein Aggregat mehrerer Glieder, mit verschiedenen Bedeutungen der Zeichen n und i, gedacht werden.

§ 5.

Um die Gleichungen (5) und (6) einer ähnlichen Behandlung wie die Gleichungen (3) und (4) zu unterwerfen, sey

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \operatorname{cotg}\alpha\,(1 + gZ_1 + g^2 Z_2 + g^3 Z_3 + \ldots\ldots),$$

indem α in derselben Bedeutung, wie im § 2, genommen wird, und $Z_1, Z_2 \ldots\ldots$ Funktionen von z vorstellen, welche mit dieser Veränderlichen zugleich zu Null werden. Es ist demnach

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \operatorname{cotg}\alpha\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z} + g\frac{\partial Z_2}{\partial z} + \ldots\ldots\right),$$

und vermöge der Gleichung (5) müssen die Coefficienten $\frac{\partial Z_1}{\partial z}, \frac{\partial Z_2}{\partial z} \ldots\ldots$ so beschaffen seyn, daß, wenn $z = 0$ wird, $\frac{\partial Z_1}{\partial z}$ den Werth $\left(\frac{1}{g\sin\alpha}\right)^2$ bekommt, die übrigen aber ebenfalls verschwinden. Desgleichen ist

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^3 x}{\partial z^3} = \operatorname{cotg}\alpha\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} + g\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} + \ldots\ldots\right),$$

und $$\frac{1}{g}\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} = \operatorname{cotg}^2\alpha\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} + g\left(\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}\cdot Z_1\right) + g^2\left(\frac{\partial^2 Z_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2}\cdot Z_1 + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}\cdot Z_2\right) + \ldots\ldots\right),$$

ferner $$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2 = g\operatorname{cotg}^2\alpha\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^2 + 2g\frac{\partial Z_1}{\partial z}\frac{\partial Z_2}{\partial z} + \ldots\ldots\right),$$

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} = (\operatorname{cotg}\alpha)^{\frac{4-i}{2}}\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{4-i}{2}} + \frac{4-i}{2}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z}\,g + \frac{4-i}{2}\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_3}{\partial z} + \frac{2-i}{4}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\right)^2\right)g^2 + \ldots\right),$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{\frac{i}{2}} = (\operatorname{cotg}\alpha)^{\frac{i}{2}}\left(1 + \frac{i}{2}Z_1\,g + \frac{i}{2}\left(Z_2 + \frac{i-2}{4}Z_1^2\right)g^2 + \ldots\ldots\right),$$

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + 2\operatorname{cotg}^2\alpha\cdot Z_1\,g + 2\operatorname{cotg}^2\alpha\left(Z_2 + \frac{1}{2}Z_1^2\right)g^2 + \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{i-1}\left[1 + (i-1)\cos^2\alpha\cdot Z_1\,g + (i-1)\left(\cos^2\alpha\left(Z_2 + \frac{1}{2}Z_1^2\right) + \frac{i-3}{2}\cos^4\alpha\cdot Z_1^2\right)g^2 + \ldots\ldots\right],$$

und

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} = \operatorname{cotg}^2\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{i-1}\Big[\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{4-i}{2}} + \Big(\frac{4-i}{2}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z} + \left(\frac{i}{2} + (i-1)\cos^2\alpha\right)\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{4-i}{2}}\cdot Z_1\Big)g$$

$$+\Big(\frac{4-i}{2}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_3}{\partial z}+\frac{(4-i)(2-i)}{2.4}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{-\frac{i}{2}}\Big(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\Big)^2+\frac{4-i}{2}\Big(\frac{i}{2}+(i-1)\cos^2\alpha\Big)\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z}\cdot Z_1$$

$$+\Big(\Big(\frac{i}{2}+(i-1)\cos^2\alpha\Big)Z_2+\Big(\frac{i(i-2)}{2.4}+\frac{(i-1)(i+1)}{2}\cos^2\alpha+\frac{(i-1)(i-3)}{2}\cos^4\alpha\Big)Z_1^2\Big)\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{4-i}{2}}\Big)g^2+\ldots\Big].$$

Es ergeben sich somit folgende Theilgleichungen:

1) $\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}=2p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{4-i}{2}}$;

2) $\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2}=(4-i)p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z}+2p\Big(\frac{i}{2}+(i-1)\cos^2\alpha\Big)\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{4-i}{2}}\cdot Z_1+3\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^2-\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}Z_1$;

3) $\frac{\partial^2 Z_3}{\partial z^2}=(4-i)p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_3}{\partial z}+\frac{(4-i)(2-i)}{4}p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{-\frac{i}{2}}\Big(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\Big)^2+(4-i)p\Big(\frac{i}{2}+(i-1)\cos^2\alpha\Big)\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z}\cdot Z_1$

$\quad+2p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{4-i}{2}}\Big(\Big(\frac{i}{2}+(i+1)\cos^2\alpha\Big)Z_2+\Big(\frac{i(i-2)}{2.4}+\frac{(i-1)(i+1)}{2}\cos^2\alpha+\frac{(i-1)(i-3)}{2}\cos^4\alpha\Big)Z_1^2\Big)$

$\quad+6\frac{\partial Z_1}{\partial z}\frac{\partial Z_2}{\partial z}-\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}\cdot Z_2-\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2}\cdot Z_1$;

u. s. w.

oder wenn man $\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2}\ldots$ aus 2), 3) … mittelst 1), 2) …. wegschafft,

1) $\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}=2p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{4-i}{2}}$;

2) $\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2}=(4-i)p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z}+2p\Big(\frac{i-2}{2}+(i-1)\cos^2\alpha\Big)\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{4-i}{2}}\cdot Z_1+3\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^2$;

3) $\frac{\partial^2 Z_3}{\partial z^2}=(4-i)p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_3}{\partial z}-\frac{(4-i)(i-2)}{4}p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{-\frac{i}{2}}\Big(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\Big)^2+(4-i)p\Big(\frac{i-2}{2}+(i-1)\cos^2\alpha\Big)\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z}\cdot Z_1$

$\quad+2p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{4-i}{2}}\Big(\Big(\frac{i-2}{2}+(i-1)\cos^2\alpha\Big)Z_2-\Big(\frac{(4-i)(i-2)}{2.4}-\frac{(i-1)^2}{2}\cos^2\alpha+\frac{(i-1)(3-i)}{2}\cos^4\alpha\Big)Z_1^2\Big)+6\frac{\partial Z_1}{\partial z}\frac{\partial Z_2}{\partial z}-3\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^2 Z_1$;

u. s. w.

Die Theilgleichung 1) gibt durch Integration und der obigen Bedingung entsprechende Bestimmung der Constanten

$$\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^{\frac{i-2}{2}}=(i-2)p\Big(\frac{1}{\sin\alpha}\Big)^{i-1}\cdot z+\Big(\frac{1}{f\sin\alpha}\Big)^{i-2}=\Big(\frac{1}{f\sin\alpha}\Big)^{i-2}\Big(1+(i-2)pf^{i-2}\cdot\frac{z}{\sin\alpha}\Big);$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z}=\Big(\frac{1}{f\sin\alpha}\Big)^2\Big(1+(i-2)pf^{i-2}\frac{z}{\sin\alpha}\Big)^{\frac{2}{i-2}},$$

oder, indem zur Abkürzung das Zeichen ζ für $1+(i-2)pf^{i-2}\frac{z}{\sin\alpha}$ eingeführt wird, so daß

$$\partial\zeta=\frac{(i-2)pf^{i-2}}{\sin\alpha}\partial z,\qquad \partial z=\frac{\sin\alpha}{(i-2)pf^{i-2}}\partial\zeta$$

ist, $\quad\frac{\partial Z_1}{\partial z}=\Big(\frac{1}{f\sin\alpha}\Big)^2\zeta^{\frac{2}{i-2}}$.

Aus $\partial Z_1=\frac{1}{(i-2)pf^i\sin\alpha}\zeta^{\frac{2}{i-2}}\partial\zeta$ folgt sodann $Z_1=\frac{1}{ipf^i\sin\alpha}\big(\zeta^{\frac{i}{i-2}}-1\big)$, so wie aus

$Z_1\partial z=\frac{1}{i(i-2)p^2f^{2i-2}}\big(\zeta^{\frac{i}{i-2}}-1\big)\partial\zeta$ ferner $\int Z_1\partial z=\frac{1}{ip^2f^{2i-2}}\Big(\frac{1}{2(i-1)}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}}-\frac{1}{i-2}\zeta+\frac{i}{2(i-1)(i-2)}\Big)$ hervorgeht.

In der Theilgleichung 2) ist der Factor $(4-i)\mu\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{2-i}{2}}$ des ersten Gliedes auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gleich $\frac{(4-i)\mu}{f^{2-i}\sin\alpha}\zeta^{-1}$. Wird daher zum Behuf der Integration zuerst

$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} = (4-i)\mu\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{2-i}{2}} . \frac{\partial Z_2}{\partial z}, \text{ d. i. } \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z} = \frac{4-i}{i-2}\,\frac{\partial \zeta}{\zeta} . \frac{\partial Z_2}{\partial z}$$

angenommen, so erhält man nach der Methode der Variation der Constanten

$$\frac{\partial Z_2}{\partial z} = C_2 . \zeta^{\frac{4-i}{i-2}} \text{ und } \frac{\partial C_2}{\partial z} . \zeta^{\frac{4-i}{i-2}} = 2\mu\left(\frac{i-2}{2} + (i-1)\cos^2\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^{\frac{4-i}{2}} . Z_1 + 3\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)^2,$$

oder entwickelt

$$\frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{1}{i f^4 \sin^4\alpha}\left((4i-2)\zeta^{\frac{i}{i-2}} - (i-2)\right) + \frac{2(i-1)\cos^2\alpha}{i f^4 \sin^4\alpha}\left(\zeta^{\frac{i}{i-2}} - 1\right),$$

somit C_2, welches mit $\frac{\partial Z_2}{\partial z}$ oder mit z zugleich verschwinden muß,

$$= \frac{1}{i\mu f^{i+2}\sin^3\alpha}\left(\frac{2i-1}{i-1}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}} - \zeta - \frac{i}{i-1}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{i\mu f^{i+2}\sin^3\alpha}\left(\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}} - \frac{2(i-1)}{i-2}\zeta + \frac{i}{i-2}\right),$$

und

$$\frac{\partial Z_2}{\partial z} = \frac{1}{i\mu f^{i+2}\sin^3\alpha}\left(\frac{2i-1}{i-1}\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} - \zeta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i}{i-1}\zeta^{\frac{4-i}{i-2}}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{i\mu f^{i+2}\sin^3\alpha}\left(\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} - \frac{2(i-1)}{i-2}\zeta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i}{i-2}\zeta^{\frac{4-i}{i-2}}\right).$$

Hieraus findet sich dann ferner

$$Z_2 = \frac{1}{i\mu^2 f^{2i}\sin^2\alpha}\left(\frac{2i-1}{2i(i-1)}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} - \frac{1}{i}\zeta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{i}{2(i-1)}\zeta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i+1}{2i}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{i\mu^2 f^{2i}\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{2i}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} - \frac{2(i-1)}{i(i-2)}\zeta^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i}{2(i-2)}\zeta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i-1}{2i}\right),$$

$$\int Z_2 \partial z = \frac{1}{i\mu^3 f^{3i-2}\sin\alpha}\left(\frac{2i-1}{2i(i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{3i-2}{i-2}} - \frac{1}{2i(i-1)}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}} - \frac{1}{2(i-1)}\zeta^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i+1}{2i(i-2)}\zeta - \frac{5i-4}{2(i-1)(i-2)(3i-2)}\right)$$
$$+ \frac{\cos^2\alpha}{i\mu^3 f^{3i-2}\sin\alpha}\left(\frac{1}{2i(3i-2)}\zeta^{\frac{3i-2}{i-2}} - \frac{1}{i(i-2)}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}} + \frac{1}{2(i-2)}\zeta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{i-1}{2i(i-2)}\zeta + \frac{1}{(i-2)(3i-2)}\right).$$

Ebenso erhält man aus der Theilgleichung 3)

$\frac{\partial Z_3}{\partial z}$ oder $C_3 . \zeta^{\frac{4-i}{i-2}}$

$$= \frac{1}{i\mu^2 f^{2i+2}\sin^4\alpha}\left(\frac{i^4+34i^3-54i^2+26i-4}{4i(i-1)^2(3i-2)}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}} - \frac{2i-1}{i(i-1)}\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} - \frac{(i+2)(2i-1)}{2(i-1)^2}\zeta^{\frac{4}{i-2}} + \frac{i+1}{2i}\zeta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i(4-i)}{4(i-1)^2}\zeta^{\frac{6-2i}{i-2}} + \frac{2i^2+i-2}{(i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{4-i}{i-2}}\right)$$
$$+ \frac{\cos^2\alpha}{i\mu^2 f^{2i+2}\sin^4\alpha}\left(-\frac{i^3-27i^2+33i-10}{2i(i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{2i+2}{i-2}} - \frac{11i-10}{i(i-2)}\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{(i+1)(i+2)}{2(i-1)(i-2)}\zeta^{\frac{4}{i-2}} + \frac{(i-1)(i+10)}{2i(i-2)}\zeta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i(4-i)}{2(i-1)(i-2)}\zeta^{\frac{6-2i}{i-2}} - \frac{4i^2-7i+2}{(i-2)(3i-2)}\zeta^{\frac{4i}{i-2}}\right)$$
$$+ \frac{\cos^4\alpha}{i\mu^2 f^{2i+2}\sin^4\alpha}\left(\frac{i+2}{4(3i-2)}\zeta^{\frac{2i+2}{i-2}} - \frac{2}{i-2}\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{i+2}{2(i-2)}\zeta^{\frac{4}{i-2}} - \frac{(i-1)(i-3)}{(i-2)^2}\zeta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i(4-i)}{4(i-2)^2}\zeta^{\frac{6-2i}{i-2}} + \frac{2(i^3-5i^2+5i-2)}{(i-2)^2(3i-2)}\zeta^{\frac{4i}{i-2}}\right),$$

$$Z_3 = \frac{1}{i\mu^3 f^{3i}\sin^3\alpha}\left(\frac{i^4+34i^3-54i^2+26i-4}{12i^2(i-1)^2(3i-2)}\zeta^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{2i-1}{2i^2(i-1)}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} - \frac{2i-1}{2(i-1)^2}\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{i+1}{2i^2}\zeta^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i}{4(i-1)^2}\zeta^{\frac{4-i}{i-2}} + \frac{2i^2+i-2}{2(i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{(i+1)(2i+1)}{6i^2}\right)$$
$$+ \frac{\cos^2\alpha}{i\mu^3 f^{3i}\sin^3\alpha}\left(-\frac{i^3-27i^2+33i-10}{6i^2(i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{11i-10}{2i^2(i-2)}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{i+1}{2(i-1)(i-2)}\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{(i-1)(i+10)}{2i^2(i-2)}\zeta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{i}{2(i-1)(i-2)}\zeta^{\frac{4-i}{i-2}} - \frac{4i^2-7i+2}{2(i-2)(3i-2)}\zeta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{(i-1)(4i+5)}{6i^2}\right)$$
$$+ \frac{\cos^4\alpha}{i\mu^3 f^{3i}\sin^3\alpha}\left(\frac{i+2}{12i(3i-2)}\zeta^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{1}{i(i-2)}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{1}{2(i-2)}\zeta^{\frac{i+2}{i-2}} - \frac{(i-1)(i-3)}{i(i-2)^2}\zeta^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i}{4(i-2)^2}\zeta^{\frac{4-i}{i-2}} + \frac{i^3-5i^2+5i-2}{(i-2)^2(3i-2)}\zeta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i-1}{3i}\right),$$

$$\int Z_3\,\partial z = \frac{1}{i n^4 f^{4i-2}\sin^2\alpha}\Big(\frac{i^4+34i^3-54i^2+26i-4}{24i^2(i-1)^2(2i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{4i-2}{i-2}} - \frac{2i-1}{2i^2(i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{3i-2}{i-2}} - \frac{2i-1}{4i(i-1)^2}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{i+1}{4i^2(i-1)}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}}$$
$$+ \frac{i}{8(i-1)^2}\zeta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{2i^2+i-2}{2i(i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{(i+1)(2i+1)}{6i^2(i-2)}\zeta - \frac{3i^4-23i^3+18i^2+4i-4}{4i(i-1)(i-2)(2i-1)(3i-2)}\Big)$$
$$+ \frac{\cos^2\alpha}{i n^4 f^{4i-2}\sin^2\alpha}\Big(-\frac{i^3-27i^2+33i-10}{12i^2(i-1)(2i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{4i-2}{i-2}} - \frac{11i-10}{2i^2(i-2)(3i-2)}\zeta^{\frac{3i-2}{i-2}} + \frac{i+1}{4i(i-1)(i-2)}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{i+10}{4i^2(i-2)}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}}$$
$$- \frac{i}{4(i-1)(i-2)}\zeta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{4i^2-7i+2}{2i(i-2)(3i-2)}\zeta^{\frac{i}{i-2}} + \frac{(i-1)(4i+5)}{6i^2(i-2)}\zeta + \frac{6i^3-34i^2+19i-2}{4i(i-2)(2i-1)(3i-2)}\Big)$$
$$+ \frac{\cos^4\alpha}{i n^4 f^{4i-2}\sin^2\alpha}\Big(\frac{i+2}{24i(2i-1)(3i-2)}\zeta^{\frac{4i-2}{i-2}} - \frac{1}{i(i-2)(3i-2)}\zeta^{\frac{3i-2}{i-2}} + \frac{1}{4i(i-2)}\zeta^{\frac{2i}{i-2}} - \frac{i-3}{2i(i-2)^2}\zeta^{\frac{2i-2}{i-2}}$$
$$+ \frac{i}{8(i-2)^2}\zeta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i^3-5i^2+5i-2}{i(i-2)^2(3i-2)}\zeta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{i-1}{3i(i-2)}\zeta - \frac{3i^3-14i^2+9i-2}{4i(i-2)(2i-1)(3i-2)}\Big),$$

u. s. w.

Man hat demnach auch

$$x = \cot\alpha\,\big(z + g\int Z_1\,\partial z + g^2\int Z_2\,\partial z + \ldots\big).$$

§ 6.

Für $i = 2$, welcher Fall wieder eine besondere Ausführung erfordert, gestalten sich die Theilgleichungen wie folgt:

1) $\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} = \frac{2n}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial z}$;

2) $\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} = \frac{2n}{\sin\alpha}\Big(\frac{\partial Z_2}{\partial z} + \cos^2\alpha\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial z}\cdot Z_1\Big) + 3\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^2$;

3) $\frac{\partial^2 Z_3}{\partial z^2} = \frac{2n}{\sin\alpha}\Big(\frac{\partial Z_3}{\partial z} + \cos^2\alpha\Big(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\cdot Z_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial z}\cdot Z_2\Big) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,\frac{\partial Z_1}{\partial z}\cdot Z_1^2\Big) + 6\frac{\partial Z_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial z} - 3\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\Big)^2 Z_1$;

u. s. w.

Aus 1) erhält man durch das bisher angewendete Verfahren

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z} = \Big(\frac{1}{f\sin\alpha}\Big)^2\cdot e^{\frac{2nz}{\sin\alpha}},$$

oder, indem man ζ für $\frac{2n}{\sin\alpha}z$ setzt, wodurch $\partial\zeta = \frac{2n}{\sin\alpha}\partial z$ und $\partial z = \frac{\sin\alpha}{2n}\partial\zeta$ wird,

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z} = \Big(\frac{1}{f\sin\alpha}\Big)^2 e^{\zeta},$$

so wie aus $\partial Z_1 = \frac{1}{2nf^2\sin\alpha}e^{\zeta}\partial\zeta$ weiter $Z_1 = \frac{1}{2nf^2\sin\alpha}(e^{\zeta}-1)$ und $\int Z_1\,\partial z = \frac{1}{4n^2f^2}(e^{\zeta}-\zeta-1)$ folgen.

Die Theilgleichung 2) liefert

$$\frac{\partial Z_2}{\partial z} = C_2\cdot e^{\zeta} \text{ und } \frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{3}{f^4\sin^4\alpha}e^{\zeta} + \frac{\cos^2\alpha}{f^4\sin^4\alpha}(e^{\zeta}-1),$$

somit $$C_2 = \frac{3}{2pf^4 \sin^3\alpha}(e^{\zeta}-1) + \frac{\cos^2\alpha}{2pf^4 \sin^3\alpha}(e^{\zeta}-\zeta-1),$$

oder $$\frac{\partial Z_2}{\partial z} = \frac{3}{2pf^4 \sin^3\alpha}(e^{2\zeta}-e^{\zeta}) + \frac{\cos^2\alpha}{2pf^4 \sin^3\alpha}(e^{2\zeta}-\zeta e^{\zeta}-e^{\zeta}),$$

woraus dann ferner $$Z_2 = \frac{3}{4p^2f^4 \sin^2\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\zeta}-e^{\zeta}+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{4p^2f^4 \sin^2\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\zeta}-\zeta e^{\zeta}-\tfrac{1}{2}\right),$$

und $$\int Z_2 \partial z = \frac{3}{8p^3f^4 \sin\alpha}\left(\tfrac{1}{4}e^{2\zeta}-e^{\zeta}+\tfrac{1}{2}\zeta+\tfrac{3}{4}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{8p^3f^4 \sin\alpha}\left(\tfrac{1}{4}e^{2\zeta}-(\zeta-1)e^{\zeta}-\tfrac{1}{2}\zeta-\tfrac{5}{4}\right)$$

hervorgehen.

Ebenso ergibt sich aus 3)

$$\frac{\partial Z_3}{\partial z} = C_3 . e^{\zeta} \text{ und } \frac{\partial C_3}{\partial z} = \frac{15}{2pf^6 \sin^5\alpha}(e^{2\zeta}-e^{\zeta}) + \frac{\cos^2\alpha}{2pf^6 \sin^5\alpha}(11e^{2\zeta}-(6\zeta+16)e^{\zeta}+5) + \frac{\cos^4\alpha}{2pf^6 \sin^5\alpha}(e^{2\zeta}-(2\zeta+1)e^{\zeta}+\zeta),$$

$$C_3 = \frac{15}{4p^2f^6 \sin^4\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\zeta}-e^{\zeta}+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{4p^2f^6 \sin^4\alpha}\left(\tfrac{11}{2}e^{2\zeta}-(6\zeta+10)e^{\zeta}+5\zeta+\tfrac{9}{2}\right) + \frac{\cos^4\alpha}{4p^2f^6 \sin^4\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\zeta}-(2\zeta-1)e^{\zeta}+\tfrac{1}{2}\zeta^2-\tfrac{3}{2}\right),$$

folglich

$$\frac{\partial Z_3}{\partial z} = \frac{15}{4p^2f^6 \sin^4\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{3\zeta}-e^{2\zeta}+\tfrac{1}{2}e^{\zeta}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{4p^2f^6 \sin^4\alpha}\left(\tfrac{11}{2}e^{3\zeta}-(6\zeta+10)e^{2\zeta}+(5\zeta+\tfrac{9}{2})e^{\zeta}\right) + \frac{\cos^4\alpha}{4p^2f^6 \sin^4\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{3\zeta}-(2\zeta-1)e^{2\zeta}+(\tfrac{1}{2}\zeta^2-\tfrac{3}{2})e^{\zeta}\right),$$

$$Z_3 = \frac{5}{8p^3f^6 \sin^3\alpha}\left(\tfrac{1}{2}e^{3\zeta}-\tfrac{3}{2}e^{2\zeta}+\tfrac{3}{2}e^{\zeta}-\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{8p^3f^6 \sin^3\alpha}\left(\tfrac{11}{6}e^{3\zeta}-(3\zeta+\tfrac{7}{2})e^{2\zeta}+(5\zeta-\tfrac{1}{2})e^{\zeta}+\tfrac{13}{6}\right)$$
$$+ \frac{\cos^4\alpha}{8p^3f^6 \sin^3\alpha}\left(\tfrac{1}{6}e^{3\zeta}-(\zeta-1)e^{2\zeta}+(\tfrac{1}{2}\zeta^2-\zeta-\tfrac{1}{2})e^{\zeta}-\tfrac{2}{3}\right),$$

$$\int Z_3 \partial z = \frac{5}{16p^4f^6 \sin^2\alpha}\left(\tfrac{1}{6}e^{3\zeta}-\tfrac{3}{4}e^{2\zeta}+\tfrac{3}{2}e^{\zeta}-\tfrac{1}{2}\zeta-\tfrac{11}{12}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{16p^4f^6 \sin^2\alpha}\left(\tfrac{11}{18}e^{3\zeta}-(\tfrac{3}{2}\zeta+1)e^{2\zeta}+(5\zeta-\tfrac{11}{2})e^{\zeta}+\tfrac{13}{6}\zeta+\tfrac{53}{9}\right)$$
$$+ \frac{\cos^4\alpha}{16p^4f^6 \sin^2\alpha}\left(\tfrac{1}{18}e^{3\zeta}-(\tfrac{1}{2}\zeta-\tfrac{3}{4})e^{2\zeta}+(\tfrac{1}{2}\zeta^2-2\zeta+\tfrac{3}{2})e^{\zeta}-\tfrac{2}{3}\zeta-\tfrac{83}{36}\right).$$

u. s. f.

§7.

Mit Hülfe der in den beiden vorhergehenden §§ abgeleiteten Formeln lassen sich nun auch für jeden Punkt der Flugbahn die Bogenlänge s derselben, die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ des Geschosses und die vom Anfange der Bewegung an verflossene Zeit t in der diesem Punkt entsprechenden Coordinate z ausdrücken. Man findet nämlich aus der Reihe für $\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1}$ (§5)

$$s \text{ oder } \int \frac{\partial s}{\partial z} . \partial z = \frac{1}{\sin\alpha}\left[z + g\cos^2\alpha \int Z_1 \partial z + g^2 \cos^2\alpha \left(\int Z_2 \partial z + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha \int Z_1^2 \partial z\right) + \dots\right],$$

und mittelst der Gleichung (5)

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2(1+gZ_1+g^2Z_2+\dots)}{\frac{\partial Z_1}{\partial z}+g\frac{\partial Z_2}{\partial z}+g^2\frac{\partial Z_3}{\partial z}+\dots}$$

und $\frac{\partial t}{\partial z} = \left(\frac{\frac{\partial Z_1}{\partial z} + g \frac{\partial Z_2}{\partial z} + g^2 \frac{\partial Z_3}{\partial z} + \cdots\cdots}{1 + g Z_1 + g^2 Z_2 + \cdots} \right)^{\frac{1}{2}}$,

woraus durch weitere Reihen-Entwickelung und Integration die Zeit t als Funktion von z sich darstellen läßt.

§ 8.

Was die Brauchbarkeit der aus den Gleichungen der Flugbahn im Vorigen abgeleiteten Integral-Ausdrücke für $\frac{\partial z}{\partial x}$, z, $\frac{\partial x}{\partial z}$, x etc. zur Ausführung ballistischer Berechnungen betrifft, so bieten sich zunächst folgende Bemerkungen dar.

Es ist als eine Folge der Entwickelung in Reihenform, der man sich zur Bewerkstelligung der Integration bedient hat, zu betrachten, daß diese Ausdrücke nicht auf den ganzen Umfang der krummen Linie, welche die Differential-Gleichungen der Flugbahn vorstellen, vom Ausgangspunkte des Geschoßes an bis zu dem Endpunkte, an welchem die krumme Linie mit der vertikalen Asymptote zusammenfällt, Anwendung finden. In der That konnte, wenn bei jener Entwickelung in die Ausdrücke für $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}$, $\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1}$ die für $\frac{\partial z}{\partial x}$ (32) oder $\frac{\partial x}{\partial z}$ (35) angenommenen Reihen, welche hier der Kürze wegen mit $tg\alpha - X$, oder beziehungsweise mit $cotg\alpha + Z$, bezeichnet werden mögen, aufgenommen wurden, dieses nur in der Voraussetzung geschehen, daß die Reihen X und Z, und ebenso die Ausdrücke für $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}$, $\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1}$ convergent seyen, indem, wenn diese Convergenz als nicht vorhanden betrachtet werden muß, der Calcul, als von einer Ungereimtheit ausgehend, überhaupt zu keinem Ergebniß führen kann. Wenn daher in dem Umfange einer gewissen Strecke der krummen Linie die Winkel, deren Tangenten die Funktionen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial z}$ vorstellen, eine Größe erreichen, bei welcher die Ausdrücke für $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}$, $\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1}$ nicht mehr convergiren können, so kann auch in Beziehung auf diese Strecke das aus der Rechnung hervorgehende Endresultat kein richtiges seyn, und dieses muß sich ebenfalls durch das Gebrechen mangelnder Convergenz, woran die sich ergebenden Integral-Ausdrücke leiden, zu erkennen

geben, oder diese Ausdrücke können nicht auf die ganze Ausdehnung der krummen Linie, sondern nur auf einen Theil derselben, in welchem jener Winkel gewisse Gränzen nicht überschreitet, anwendbar seyn, welche Beschränkung nicht Statt hätte, wenn die Integration der Differential-Gleichungen sich in geschlossener Form ausführen ließe.

Wird im Ausdrucke für $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1}$ (32) $\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha - X$ gesetzt, so daß $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$ oder $1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2\left(1-2\sin\alpha\cos\alpha\, X+\cos^2\alpha\, X^2\right)$ ist, so hat man

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{i-1}\left(1-2\sin\alpha\cos\alpha . X+\cos^2\alpha . X^2\right)^{\frac{i-1}{2}}.$$

Soll nun die hieraus entwickelte Reihe convergiren, so muß $2\sin\alpha\cos\alpha . X - \cos^2\alpha\, X^2$, wofür der Kürze wegen V gesetzt werde, absolut genommen, kleiner als 1 seyn. V hat ein Maximum, welches $= \sin^2\alpha$ ist, für $X = tg\,\alpha$ oder $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; es verschwindet sowohl für $X = 0$ oder $\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha$, als auch für $X = 2\,tg\,\alpha$ oder $\frac{\partial z}{\partial x} = -\,tg\,\alpha$, wird für größere Werthe von X als $2\,tg\,\alpha$ negativ und gleich -1 für $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$, worauf sein absoluter Werth mit X fortwährend zunimmt, bis er mit $\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,(-90^\circ)$, welcher Werth von $\frac{\partial z}{\partial x}$ dem Endpunkte mit der verticalen Berührenden entspricht, ebenfalls unendlich wird. Da das Maximum $\sin^2\alpha$ von V, welches am Scheitelpunkt der Bahn Statt hat, immer kleiner als 1 ist, so liegt in der für $\frac{\partial z}{\partial x}$ angenommenen Reihenform kein Grund, warum die entwickelten Reihen nicht bis zu diesem Punkte convergiren sollten; wohl aber wird nur für kleinere Werthe von α deren Convergenz stark genug seyn, um sie schon bei einer kleinen Anzahl von Gliedern zur Berechnung der Bahn bis zu dem genannten Punkte gehörig brauchbar zu machen. Dagegen muß nothwendig in Bezug auf denjenigen Theil der Bahn, in welchem $\frac{\partial z}{\partial x}$ dem Werthe $-\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$ nahe kommt, die Convergenz der Reihen ganz aufhören, ohne daß jedoch umgekehrt aus der Abnahme des absoluten Werthes von V, von $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ an bis zu $\frac{\partial z}{\partial x} = -\,tg\,\alpha$, auch auf wieder zunehmende Convergenz in dieser Ausdehnung der Bahn geschlossen werden kann.

Nimmt man auf ähnliche Art im Ausdruck für $\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^{i-1}$ (35)

$\frac{dx}{dz} = \cot g\,\alpha + Z$ an, so wird

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{i-1}\left(1+2\sin\alpha\cos\alpha . Z+\sin^2\alpha . Z^2\right)^{\frac{i-1}{2}}.$$

Die Größe $2\sin\alpha\cos\alpha . Z + \sin^2\alpha . Z^2$ nimmt mit Z oder $\frac{dx}{dz}$ fortwährend zu, und wird am Scheitelpunkt der Bahn mit den beiden letzteren Größen zugleich unendlich. Die Convergenz des Reihen-Ausdrucks von $\left(\frac{ds}{dz}\right)^{i-1}$, und somit auch der für $\frac{dx}{dz}$ und x entwickelten Reihen, kann sich daher nicht bis zu diesem Punkte erstrecken, und muß schon für denjenigen Werth von Z, welcher $2\sin\alpha\cos\alpha . Z + \sin^2\alpha . Z^2$ gleich 1 gibt, d. i. für $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$, gänzlich aufhören. Die Anwendung, welche die für $\frac{dx}{dz}$ und x erhaltenen Reihen (§ 5 und 6) zulassen, ist demnach noch beschränkter als jene der Reihen für $\frac{dz}{dx}$ und z (§ 2 und 3), und kann sich nur auf einen Theil des aufsteigenden Astes, nie aber bis zum Scheitel und dem absteigenden Aste der Flugbahn erstrecken. Daß sie nicht auf Theile beider Äste zugleich anwendbar sind, geht überdieß daraus hervor, daß der Werth $Z = 0$ nur einen einzigen Werth für x, nämlich ebenfalls Null, gibt, und daß $\frac{ds}{dz}$ oder $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$ beim Uebergange von einem der beiden Äste zum andern einem Zeichenwechsel unterliegt, den die für diese Größe angenommene Form des Ausdrucks nicht einschließt. Indessen ist leicht zu erkennen, daß bei größeren, im zweiten Octanten des Kreises liegenden, positiven oder negativen, Werthen des Winkels α die ersteren Reihen (§ 5 und 6), wenigstens für den größeren, dem Anfangspunkt der Bahn zunächst liegenden, Theil des aufsteigenden Astes brauchbarer sind als die letzteren Reihen (§ 2 und 3), und daß diese hauptsächlich bei kleineren, im ersten Octanten des Kreises begriffenen, positiven oder negativen, Werthen dieses Winkels zur Anwendung sich eignen.

§ 9.

Zu einer weiteren ähnlichen Auflösung des ballistischen Problems, deren Anwendbarkeit weniger von der Größe des Erhöhungswinkels α abhängt, führt folgendes Verfahren.

Man beziehe die Coordinaten der Flugbahn auf ein Paar neuer Achsen Ou und Ov, welche von demselben Anfangspunkte wie die Achsen Ox und Oz ausgehen, und von welchen die Achse der u mit der horizontalen Achse der x, so wie die Achse der v mit der vertikalen Achse der z, den Winkel β einschließen. Man hat dann

$$u = \cos\beta . x + \sin\beta . z, \quad \text{und } x = \cos\beta . u - \sin\beta . v,$$
$$v = \cos\beta . z - \sin\beta . x, \quad z = \cos\beta . v + \sin\beta . u;$$

und durch Einführung der neuen Coordinaten gehen die Gleichungen der Flugbahn (1) und (2) über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g\sin\beta - p\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdots\cdots\cdots (7)$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -g\cos\beta - p\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdots\cdots\cdots (8).$$

Um auch aus diesen Gleichungen wieder die Veränderliche t zu eliminiren, und die Unabhängigkeit auf die Veränderliche u zu übertragen, hat man

$$\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^{-3} \text{ statt } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\left(\frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} - \frac{\partial v}{\partial u}\,\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^{-3} \text{ statt } \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \text{und } \frac{\partial s}{\partial u}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^{-1} \text{ statt } \frac{\partial s}{\partial t}$$

zu setzen. Dadurch erhält man

aus (7)

$$\frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} = g\sin\beta\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^4 + p\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^{4-i} \cdots\cdots\cdots (9)$$

aus (8) in Verbindung mit (7)

$$\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2\left(\cos\beta - \sin\beta\frac{\partial v}{\partial u}\right) = -\frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \cdots\cdots\cdots (10)$$

Aus der letztern Gleichung folgt

$$-\frac{1}{g}\,\frac{\partial^3 v}{\partial u^3} = 2\frac{\partial t}{\partial u}\,\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}\left(\cos\beta - \sin\beta\frac{\partial v}{\partial u}\right) - \sin\beta\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial u^2},$$

und hieraus durch Elimination von $\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}$ mittelst der Gleichung (9), und sodann von $\frac{\partial t}{\partial u}$ mittelst (10)

$$-\frac{1}{g}\,\frac{\partial^3 v}{\partial u^3}\left(1 - tg\beta\frac{\partial v}{\partial u}\right) = 3g\,tg\beta\left(\frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)^2 + 2p(\cos\beta)^{\frac{i-2}{2}}\left(1 - tg\beta\frac{\partial v}{\partial u}\right)^{\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^{i-1}\left(-\frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} \cdots (11).$$

Die Gleichungen (10) und (11) sind, so wie die Gleichungen (7) und (8), wenn auch der Gestalt nach von den Gleichungen (1) und (2) verschieden, der Bedeutung nach mit denselben identisch, und in der Gleichung (11) kann das zweite Glied des rechts stehenden Theils wieder als ein Aggregat mehrerer Glieder, mit verschiedenen Werthen von p und i, angesehen werden.

§ 10.

Zu größerer Einfachheit werde der Winkel β, welcher ganz beliebig gewählt werden kann, als gleich dem spitzen Winkel α, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der Achse der x einschließt (§ 2), und jedes der Zeichen i und p als nur eindeutig, angenommen. Man setze

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -g(U_1 + gU_2 + g^2U_3 + \dots),$$

in welcher Reihe die Coefficienten $U_1, U_2 \dots$ als Funktionen von u gedacht werden, welche mit dieser Veränderlichen zugleich zu Null werden. Unter dieser Voraussetzung wird

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{\partial U_1}{\partial u} + g\frac{\partial U_2}{\partial u} + \dots,$$

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^3 v}{\partial u^3} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} + g\frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2} + \dots,$$

und um der Gleichung (10) zu genügen, sind in der ersten der beiden letztern Reihen die Coefficienten so zu bestimmen, daß $\frac{\partial U_1}{\partial u} = \frac{\cos\alpha}{F^2}$, und $\frac{\partial U_2}{\partial u}, \frac{\partial U_3}{\partial u} \dots$ gleich Null werden für $u = 0$. Man hat ferner

$$1 - tg\alpha\frac{\partial v}{\partial u} = 1 + tg\alpha.U_1 g + tg\alpha.U_2 g^2 + \dots$$

$$\left(1 - tg\alpha\frac{\partial v}{\partial u}\right)^{\frac{i}{2}} = 1 + \frac{i}{2}tg\alpha.U_1 g + \left(\frac{i}{2}tg\alpha.U_2 + \frac{i(i-2)}{2.4}tg^2\alpha.U_1^2\right)g^2 + \dots$$

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)^2 = \left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial U_2}{\partial u}\frac{\partial U_1}{\partial u}g + \left(2\frac{\partial U_3}{\partial u}\frac{\partial U_1}{\partial u} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2\right)g^2 + \dots$$

$$\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}} + \frac{4-i}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_2}{\partial u}g + \frac{4-i}{2}\left(\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_3}{\partial u} + \frac{2-i}{4}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2\right)g^2 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^{i-1} = 1 + \frac{i-1}{2}U_1^2 g^2 + \dots$$

daher

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^3 v}{\partial u^3}\left(1 - tg\alpha.\frac{\partial v}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2} + tg\alpha\frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}U_1\right)g + \left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial u^2} + tg\alpha\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2}U_1 + \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}U_2\right)\right)g^2$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 U_4}{\partial u^2} + tg\alpha\left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial u^2}U_1 + \frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2}U_2 + \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}U_3\right)\right)g^3 + \dots$$

und

$$\left(1-\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial v}{\partial u}\right)^{\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^{i-1}\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)^{\frac{4-i}{2}}=\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}+\left(\frac{4-i}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_2}{\partial u}+\frac{i}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}.U_1\right)g+\left(\frac{4-i}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_3}{\partial u}+\frac{(4-i)(2-i)}{2.4}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{i(4-i)}{4}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_2}{\partial u}U_1+\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}\left(\frac{i}{2}\operatorname{tg}\alpha.U_2+\left(\frac{i-1}{4}+\frac{i(i-2)}{2.4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)U_1^2\right)\right)g^2+\cdots$$

Die Gleichung (11) zerfällt somit in folgende Theilgleichungen:

$$1)\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}=2p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}};$$

$$2)\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2}=(4-i)p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_2}{\partial u}+ip(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}.U_1+\operatorname{tg}\alpha\left(3\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}U_1\right);$$

$$3)\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial u^2}=(4-i)p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_3}{\partial u}-\frac{(4-i)(i-2)}{4}p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2+\frac{i(4-i)}{2}p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_2}{\partial u}U_1$$

$$+p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}\left(i\operatorname{tg}\alpha.U_2+\left(i-1+\frac{i(i-2)}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)U_1^2\right)+\operatorname{tg}\alpha\left(6\frac{\partial U_2}{\partial u}\frac{\partial U_1}{\partial u}-\frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2}U_1-\frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}U_2\right);$$

u. s. w.

oder, wenn $\frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2}\ldots$ aus 2), 3) mittelst 1), 2) eliminirt werden,

$$1)\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}=2p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}};$$

$$2)\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2}=(4-i)p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_2}{\partial u}+(i-2)p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}.U_1+3\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2;$$

$$3)\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial u^2}=(4-i)p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_3}{\partial u}-\frac{(4-i)(i-2)}{4}p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{-\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2+\frac{(4-i)(i-2)}{2}p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}.\frac{\partial U_2}{\partial u}U_1$$

$$+p(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}\left((i-2)\operatorname{tg}\alpha.U_2+\left(i-1-\frac{(4-i)(i-2)}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)U_1^2\right)+6\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial U_2}{\partial u}\frac{\partial U_1}{\partial u}-3\operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2U_1;$$

u. s. w.

Indem man wie bisher verfährt, gibt die Theilgleichung 1)

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{i-2}{2}}=\left(\frac{\cos\alpha}{f^2}\right)^{\frac{i-2}{2}}\left(1+(i-2)pf^{i-2}.u\right),$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial u}=\frac{\cos\alpha}{f^2}\left(1+(i-2)pf^{i-2}.u\right)^{\frac{2}{i-2}};$$

oder, wenn man der Kürze halber $1+(i-2)pf^{i-2}.u$ mit ϑ bezeichnet, wodurch

$$\partial\vartheta=(i-2)pf^{i-2}.\partial u,\qquad \partial u=\frac{1}{(i-2)pf^{i-2}}\partial\vartheta$$

wird,

$$\frac{\partial U_1}{\partial u}=\frac{\cos\alpha}{f^2}\vartheta^{\frac{2}{i-2}}.$$

Aus $\partial U_1=\frac{\cos\alpha}{(i-2)pf^i}\vartheta^{\frac{2}{i-2}}\partial\vartheta$ ergibt sich dann $U_1=\frac{\cos\alpha}{ipf^i}\left(\vartheta^{\frac{i}{i-2}}-1\right)$, so wie

aus $U_1 \partial u = \frac{\cos\alpha}{i(i-2)\mu^2 f^{2i-2}}\left(\vartheta^{\frac{i}{i-2}}-1\right)\partial\vartheta$ das weitere Integral $\int U_1 \partial u = \frac{\cos\alpha}{i\mu^2 f^{2i-2}}\left(\frac{1}{2(i-1)}\vartheta^{\frac{2i-2}{i-2}} - \frac{1}{i-2}\vartheta + \frac{i}{2(i-1)(i-2)}\right)$.

In der Theilgleichung 2) ist der Factor $(4-i)\mu(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}$ des ersten rechts stehenden Gliedes gleich $\frac{(4-i)\mu}{f^{2-i}\cdot\vartheta}$. Wird daher zum Behuf der Integration zuerst

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2} = (4-i)\mu(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{2-i}{2}}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial u}, \text{ oder } \frac{\partial^2 U_2}{\partial u} = \frac{4-i}{i-2}\,\frac{\partial\vartheta}{\vartheta}\,\frac{\partial U_2}{\partial u}$$

gesetzt, so findet man durch die Methode der Variation der Constanten

$$\frac{\partial U_2}{\partial u} = C_2\cdot\vartheta^{\frac{4-i}{i-2}} \text{ und } \frac{\partial C_2}{\partial u}\cdot\vartheta^{\frac{4-i}{i-2}} = tg\,\alpha\left((i-2)\mu(\cos\alpha)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^{\frac{4-i}{2}}\cdot U_1 + 3\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2\right),$$

oder entwickelt

$$\frac{\partial C_2}{\partial u} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{i f^4}\left(2(2i-1)\vartheta^{\frac{i}{i-2}} - i + 2\right),$$

somit C_2, welches mit $\frac{\partial U_2}{\partial u}$ oder mit u zugleich verschwinden muß,

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{i\mu f^{i+2}}\left(\frac{2i-1}{i-1}\vartheta^{\frac{2i-2}{i-2}} - \vartheta - \frac{i}{i-1}\right),$$

und $\frac{\partial U_2}{\partial u}$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{i\mu f^{i+2}}\left(\frac{2i-1}{i-1}\vartheta^{\frac{i+2}{i-2}} - \vartheta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i}{i-1}\vartheta^{\frac{4-i}{i-2}}\right);$$

woraus sofort

$$U_2 = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{i\mu^2 f^{2i}}\left(\frac{2i-1}{2i(i-1)}\vartheta^{\frac{2i}{i-2}} - \frac{1}{i}\vartheta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{i}{2(i-1)}\vartheta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i+1}{2i}\right),$$

und

$$\int U_2\,\partial u = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{i\mu^3 f^{3i-2}}\left(\frac{2i-1}{2i(i-1)(3i-2)}\vartheta^{\frac{3i-2}{i-2}} - \frac{1}{2i(i-1)}\vartheta^{\frac{2i-2}{i-2}} - \frac{1}{2(i-1)}\vartheta^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i+1}{2i(i-2)}\vartheta - \frac{5i-4}{2(i-1)(i-2)(3i-2)}\right)$$

gefunden werden.

Auf gleiche Weise ergibt sich aus 3)

$$\frac{\partial U_3}{\partial u} \text{ oder } C_3\cdot\vartheta^{\frac{4-i}{i-2}} = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{i\mu^2 f^{2i+2}}\left(\frac{i^4+34i^3-54i^2+26i-4}{4i(i-1)^2(3i-2)}\vartheta^{\frac{2i+2}{i-2}} - \frac{2i-1}{i(i-1)}\vartheta^{\frac{i+2}{i-2}} - \frac{(i+2)(2i-1)}{2(i-1)^2}\vartheta^{\frac{4}{i-2}} + \frac{i+1}{2i}\vartheta^{\frac{2}{i-2}}\right.$$
$$\left. + \frac{i(4-i)}{4(i-1)^2}\vartheta^{\frac{6-2i}{i-2}} + \frac{2i^2+i-2}{(i-1)(3i-2)}\vartheta^{\frac{4-i}{i-2}}\right)$$
$$+ \frac{\cos^3\alpha}{i\mu^2 f^{2i+2}}\left(\frac{i-1}{i(3i-2)}\vartheta^{\frac{2i+2}{i-2}} - \frac{1}{i}\vartheta^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{i-1}{i(i-2)}\vartheta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{i}{(i-2)(3i-2)}\vartheta^{\frac{4-i}{i-2}}\right),$$

$$U_3 = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{i\mu^3 f^{3i}}\left(\frac{i^4+34i^3-54i^2+26i-4}{12i^2(i-1)^2(3i-2)}\vartheta^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{2i-1}{2i^2(i-1)}\vartheta^{\frac{2i}{i-2}} - \frac{2i-1}{2(i-1)^2}\vartheta^{\frac{i+2}{i-2}} + \frac{i+1}{2i^2}\vartheta^{\frac{i}{i-2}} + \frac{i}{4(i-1)^2}\vartheta^{\frac{4-i}{i-2}} + \frac{2i^2+i-2}{2(i-1)(3i-2)}\vartheta^{\frac{2}{i-2}} - \frac{(i+1)(2i+1)}{6i^2}\right)$$
$$+ \frac{\cos^3\alpha}{i\mu^3 f^{3i}}\left(\frac{i-1}{3i^2(3i-2)}\vartheta^{\frac{3i}{i-2}} - \frac{1}{2i^2}\vartheta^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{i-1}{i^2(i-2)}\vartheta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{i}{2(i-2)(3i-2)}\vartheta^{\frac{2}{i-2}} + \frac{i-1}{6i^2}\right),$$

$$\int U_3\,\partial u = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{i\mu^4 f^{4i-2}}\left(\frac{i^4+34i^3-54i^2+26i-4}{24i^2(i-1)^2(2i-1)(3i-2)}\vartheta^{\frac{4i-2}{i-2}} - \frac{2i-1}{2i^2(i-1)(3i-2)}\vartheta^{\frac{3i-2}{i-2}} - \frac{2i-1}{4i(i-1)^2}\vartheta^{\frac{2i}{i-2}} + \frac{i+1}{4i^2(i-1)}\vartheta^{\frac{2i-2}{i-2}} + \frac{i}{8(i-1)^2}\vartheta^{\frac{2}{i-2}}\right.$$
$$\left. + \frac{2i^2+i-2}{2i(i-1)(3i-2)}\vartheta^{\frac{i}{i-2}} - \frac{(i+1)(2i+1)}{6i^2(i-2)}\vartheta - \frac{3i^4-23i^3+18i^2+4i-4}{4i(i-1)(i-2)(2i-1)(3i-2)}\right)$$

$$+\frac{\cos^3\alpha}{i p^4 f^{4i-2}}\left(\frac{i-1}{6i^2(2i-1)(3i-2)}\gamma^{\frac{4i-2}{i-2}}-\frac{1}{2i^2(3i-2)}\gamma^{\frac{3i-2}{i-2}}+\frac{1}{2i^2(i-2)}\gamma^{\frac{2i-2}{i-2}}-\frac{1}{2(i-2)(3i-2)}\gamma^{\frac{i}{i-2}}+\frac{i-1}{6i^2(i-2)}\gamma-\frac{1}{2(i-2)(2i-1)(3i-2)}\right);$$

u. s. f.

Somit ist nicht nur $v=-g\left(\int U_1\partial u+g\int U_2\partial u+g^2\int U_3\partial u\ldots\right)$, sondern sind auch die Coordinaten x und z als Functionen von u gegeben.

§ 11.

Unter den besondern Werthen des Exponenten i, für welche die analytischen Ausdrücke der Coefficienten $U_1, U_2 \ldots\ldots$ sich nicht unter die im vorigen § entwickelten Formen fügen, verdient hauptsächlich $i=2$ wieder eine eigenthümliche Behandlung.

Indem für den letztern Fall, und wenn $\beta=\alpha$ genommen wird, die Gleichung (11) auf

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^3 v}{\partial u^3}\left(1-tg\alpha\frac{\partial v}{\partial u}\right)=3\,tg\alpha.\,g\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)^2+2p\left(1-tg\alpha\frac{\partial v}{\partial u}\right)\frac{\partial s}{\partial u}\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)$$

sich vereinfacht, hat man ferner

$$\frac{\partial s}{\partial u}=1+\tfrac{1}{2}U_1^2g^2+U_1U_2g^3+\ldots\ldots,$$

$$\left(1-tg\alpha\frac{\partial v}{\partial u}\right)\frac{\partial s}{\partial u}\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)=\frac{\partial U_1}{\partial u}+\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}+tg\alpha\frac{\partial U_1}{\partial u}U_1\right)g+\left(\frac{\partial U_3}{\partial u}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial U_1}{\partial u}U_1^2+tg\alpha\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}U_1+\frac{\partial U_1}{\partial u}U_2\right)\right)g^2$$
$$+\left(\frac{\partial U_4}{\partial u}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial U_2}{\partial u}U_1^2+\frac{\partial U_1}{\partial u}U_1U_2+tg\alpha\left(\frac{\partial U_3}{\partial u}U_1+\frac{\partial U_2}{\partial u}U_2+\frac{\partial U_1}{\partial u}U_3+\tfrac{1}{2}\frac{\partial U_1}{\partial u}U_1^3\right)\right)g^3+\ldots$$

und die Theilgleichungen, in welche die Gleichung der Flugbahn sich zerlegt, sind:

1) $\frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2}=2p\frac{\partial U_1}{\partial u}$;

2) $\frac{\partial^2 U_2}{\partial u^2}=2p\frac{\partial U_2}{\partial u}+3\,tg\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2$;

3) $\frac{\partial^2 U_3}{\partial u^2}=2p\frac{\partial U_3}{\partial u}+p\frac{\partial U_1}{\partial u}U_1^2+6\,tg\alpha\frac{\partial U_1}{\partial u}\frac{\partial U_2}{\partial u}-3\,tg^2\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2.U_1$;

4) $\frac{\partial^2 U_4}{\partial u^2}=2p\frac{\partial U_4}{\partial u}+p\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}.U_1^2+2\frac{\partial U_1}{\partial u}U_1U_2\right)+3\,tg\alpha\left(\left(\frac{\partial U_2}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial U_3}{\partial u}\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)-3\,tg^2\alpha\left(\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2U_2+2\frac{\partial U_1}{\partial u}\frac{\partial U_2}{\partial u}U_1\right)+3\,tg^3\alpha\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2U_1^2$;

u. s. w.

Man findet aus 1), indem man die Constante nach dem vorigen § bestimmt,

$\frac{\partial U_1}{\partial u}=\frac{\cos\alpha}{f^2}e^{2pu}=\frac{\cos\alpha}{f^2}e^{\gamma}$, wenn $2pu=\gamma$, somit $2p\partial u=\partial\gamma$ oder $\partial u=\frac{\partial\gamma}{2p}$ gesetzt wird,

$U=\frac{\cos\alpha}{2pf^2}(e^{\gamma}-1)$ und $\int U_1\partial u=\frac{\cos\alpha}{4p^2f^2}(e^{\gamma}-\gamma-1)$;

aus 2) nach dem bisherigen Verfahren

$$\frac{\partial U_2}{\partial u}=C_2 \cdot e^{\gamma};\ \frac{\partial C_2}{\partial u}=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{f^4}e^{\gamma} \text{ und } C_2=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2\mu f^4}(e^{\gamma}-1), \text{ daher}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial u}=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2\mu f^4}(e^{2\gamma}-e^{\gamma}),\quad U_2=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{4\mu^2 f^4}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\gamma}-e^{\gamma}+\tfrac{1}{2}\right),$$

und $\int U_2\,du=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{8\mu^3 f^4}\left(\tfrac{1}{4}e^{2\gamma}-e^{\gamma}+\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{3}{4}\right)$;

ferner ergiebt sich aus 3)

$$\frac{\partial U_3}{\partial u}=C_3 \cdot e^{\gamma};\ \frac{\partial C_3}{\partial u}=\frac{15\sin^2\alpha\cos\alpha}{2\mu f^6}(e^{2\gamma}-e^{\gamma})+\frac{\cos^3\alpha}{2\mu f^6}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\gamma}-e^{\gamma}+\tfrac{1}{2}\right),$$

daher $C_3=\frac{15\sin^2\alpha\cos\alpha}{4\mu^2 f^6}\left(\tfrac{1}{2}e^{2\gamma}-e^{\gamma}+\tfrac{1}{2}\right)+\frac{\cos^3\alpha}{4\mu^2 f^6}\left(\tfrac{1}{4}e^{2\gamma}-e^{\gamma}+\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{3}{4}\right)$,

oder $\frac{\partial U_3}{\partial u}=\frac{5\sin^2\alpha\cos\alpha}{4\mu^2 f^6}\left(\tfrac{3}{2}e^{3\gamma}-3e^{2\gamma}+\tfrac{3}{2}e^{\gamma}\right)+\frac{\cos^3\alpha}{4\mu^2 f^6}\left(\tfrac{1}{4}e^{3\gamma}-e^{2\gamma}+\left(\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{3}{4}\right)e^{\gamma}\right)$,

$$U_3=\frac{5\sin^2\alpha\cos\alpha}{8\mu^3 f^6}\left(\tfrac{1}{2}e^{3\gamma}-\tfrac{3}{2}e^{2\gamma}+\tfrac{3}{2}e^{\gamma}-\tfrac{1}{2}\right)+\frac{\cos^3\alpha}{8\mu^3 f^6}\left(\tfrac{1}{12}e^{3\gamma}-\tfrac{1}{2}e^{2\gamma}+\left(\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{4}\right)e^{\gamma}+\tfrac{1}{6}\right),$$

$$\int U_3\,du=\frac{5\sin^2\alpha\cos\alpha}{16\mu^4 f^6}\left(\tfrac{1}{6}e^{3\gamma}-\tfrac{3}{4}e^{2\gamma}+\tfrac{3}{2}e^{\gamma}-\tfrac{1}{2}\gamma-\tfrac{11}{12}\right)+\frac{\cos^3\alpha}{16\mu^4 f^6}\left(\tfrac{1}{36}e^{3\gamma}-\tfrac{1}{4}e^{2\gamma}+\left(\tfrac{1}{2}\gamma-\tfrac{1}{4}\right)e^{\gamma}+\tfrac{1}{6}\gamma+\tfrac{17}{36}\right);$$

und aus 4)

$$\frac{\partial U_4}{\partial u}=\frac{7\sin^3\alpha\cos\alpha}{8\mu^3 f^8}\left(\tfrac{5}{2}e^{4\gamma}-\tfrac{15}{2}e^{3\gamma}+\tfrac{15}{2}e^{2\gamma}-\tfrac{5}{2}e^{\gamma}\right)+\frac{3\sin\alpha\cos^3\alpha}{8\mu^3 f^8}\left(\tfrac{1}{2}e^{4\gamma}-\tfrac{5}{2}e^{3\gamma}+\left(\gamma+\tfrac{7}{2}\right)e^{2\gamma}-\left(\gamma+\tfrac{3}{2}\right)e^{\gamma}\right),$$

$$U_4=\frac{7\sin^3\alpha\cos\alpha}{16\mu^4 f^8}\left(\tfrac{5}{8}e^{4\gamma}-\tfrac{5}{2}e^{3\gamma}+\tfrac{15}{4}e^{2\gamma}-\tfrac{5}{2}e^{\gamma}+\tfrac{5}{8}\right)+\frac{3\sin\alpha\cos^3\alpha}{16\mu^4 f^8}\left(\tfrac{1}{8}e^{4\gamma}-\tfrac{5}{6}e^{3\gamma}+\left(\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{3}{2}\right)e^{2\gamma}-\left(\gamma+\tfrac{1}{2}\right)e^{\gamma}-\tfrac{7}{24}\right),$$

$$\int U_4\,du=\frac{7\sin^3\alpha\cos\alpha}{32\mu^5 f^8}\left(\tfrac{5}{32}e^{4\gamma}-\tfrac{5}{6}e^{3\gamma}+\tfrac{15}{8}e^{2\gamma}-\tfrac{5}{2}e^{\gamma}+\tfrac{5}{8}\gamma+\tfrac{125}{96}\right)+\frac{3\sin\alpha\cos^3\alpha}{32\mu^5 f^8}\left(\tfrac{1}{32}e^{4\gamma}-\tfrac{5}{18}e^{3\gamma}+\left(\tfrac{1}{4}\gamma+\tfrac{5}{8}\right)e^{2\gamma}-\left(\gamma-\tfrac{1}{2}\right)e^{\gamma}-\tfrac{7}{24}\gamma-\tfrac{253}{288}\right);$$

u. s. f.

§ 12.

Nach Entwickelung der Coefficienten U_1, U_2 als Functionen von u hat man nun ebenfalls für jeden Punkt der Bahn

$$s \text{ oder } \int\frac{ds}{du}\,du=u+\tfrac{1}{2}g^2\int U_1^2\,du+g^3\int U_1 U_2\,du+\ldots,$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{ds}{du}\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{\left(\frac{ds}{du}\right)^2\left(\cos\alpha-\sin\alpha\frac{dv}{du}\right)}{\frac{dU_1}{du}+g\frac{dU_2}{du}+\ldots},$$

und kann ferner vermittelst der Gleichung

$$\frac{dt}{du}=\left(\frac{\frac{dU_1}{du}+g\frac{dU_2}{du}+\ldots}{\cos\alpha\left(1-\operatorname{tg}\alpha\frac{dv}{du}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

durch weitere Entwickelung auch die vom Anfange der Bewegung an ver-

flossenen Zeit t als Function von u bestimmen.

Will man die Gleichungen (10) und (11) noch weiter so umformen, daß die Unabhängigkeit der Veränderlichen von der Coordinate u, deren Achse mit der horizontalen Achse Ox den Winkel β bildet, auf die Coordinate v, deren Achse mit Ox den Winkel $90°+\beta$ einschließt, übertragen wird, so geht, indem man die entsprechenden Substitutionen wie im §4 vornimmt, die Gleichung (10) in

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = \left(\cos\beta\frac{\partial u}{\partial v} - \sin\beta\right)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

die Gleichung (11) in

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^3 u}{\partial v^3}\left(\frac{\partial u}{\partial v} - tg\beta\right) = 3g\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)^2 + 2n(\cos\beta)^{\frac{i-2}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial v} - tg\beta\right)^{\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)^{\frac{4-i}{2}} \quad \ldots\ldots (13)$$

über.

Dieselbe Umwandlung der Gleichungen (10) und (11) wird, indem man sich die Achsen der u und v in ihrer Ebene vorwärts oder rückwärts um den Anfangspunkt O so weit gedreht denkt, daß jede derselben in die vorherige Lage der anderen fällt, so daß die feste Achse Ox mit der Achse der als abhängig gedachten Veränderlichen den Winkel β, mit der Achse der als unabhängig gedachten Veränderlichen aber den Winkel $90°+\beta$ bildet, auch dadurch erhalten, daß in diesen Gleichungen entweder $\beta+90°$ oder $\beta-90°$ anstatt β gesetzt, und im ersten dieser Fälle das Zeichen von v, im anderen das Zeichen von u verändert wird, und daß in beiden Fällen hierauf die Buchstaben v und u gegenseitig verwechselt werden; ohne daß jedoch, wie es auf den ersten Anblick scheinen könnte, hieraus der Schluß gezogen werden kann, daß nach vollzogener Integration der Gleichungen (10) und (11) man nur dieselben Änderungen, wodurch diese Gleichungen in die Gleichungen (12) u. (13) übergehen, auch in deren Integralen vorzunehmen nöthig habe, um ebenfalls die letzteren Gleichungen integrirt zu erhalten. Denn die Integration der Gleichungen (10) und (11), welche so wie die Gleichungen (12) und (13) noch nichts, was auf die Anfangsgeschwindigkeit Bezug hat, enthalten, hat unter der Voraussetzung zu geschehen, daß die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Achse der als unabhängig veränderlich gedachten Coordinaten den Winkel $\alpha-\beta$ oder $\beta-\alpha$ bildet, und diese Vor-

aussetzung bleibt auch bei der angenommenen Drehung der Coordinaten-Achsen noch bestehen, so daß durch die bemerkten Änderungen in den dargestellten Integralen der Gleichungen (10) und (11) man nur die integrirten Gleichungen der Bahn eines Geschosses bekäme, dessen Anfangsrichtung mit der festen Achse Ox einen Winkel $\alpha + 90°$ oder $\alpha - 90°$ bildet. Dagegen ist der Integration der Gleichungen (12) und (13) die Annahme zu Grunde zu legen, daß die Anfangsrichtung mit der Achse der als abhängig veränderlich gedachten Coordinaten den Winkel $\alpha - \beta$ oder $\beta - \alpha$, d. i. mit der horizontalen Achse Ox den Winkel α, bildet, und die Integrale dieser Gleichungen müßten hierdurch ganz anders sich ergeben, als die auf die bemerkte Weise geänderten Integrale jener Gleichungen.

Werden indessen die beiden Winkel β und α wie oben (§ 10) als unter sich gleich angenommen, so ist eine Integration der nach (12) und (13) gestalteten Gleichungen der Bahn in Reihenform, wodurch u in v ausgedrückt würde, weil $\frac{du}{dv}$ für den Anfangspunkt unendlich groß ist, überhaupt nicht ausführbar.

Ähnliche Betrachtungen über die Brauchbarkeit der entwickelten Reihen, wie die im § 8 angestellten, führen zu der Folgerung, daß auch die für $\frac{dv}{du}$ und v gefundenen Reihen nur eine in Rücksicht der Größe des zu berechnenden Umfanges der Flugbahn beschränkte Anwendung gestatten. Wenn nämlich die Berührende an dem Punkte, dessen Coordinaten v und u sind, mit der Achse der u einen dem Werthe von 45° sich nähernden Winkel einschließt, oder wenn $\frac{dv}{du}$, die Tangente dieses Winkels, nahe die Größe 1 erreicht, so kann der in die Gleichungen eingehende Ausdruck für $\left(\frac{ds}{du}\right)^{i-1}$ oder $\left(1+\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right)^{\frac{i-1}{2}}$ nicht mehr convergiren, und es muß folglich angenommen werden, daß für solche Werthe von $\frac{dv}{du}$ auch die aus den Operationen der Rechnung für diese Funktion hervorgehende Reihe nicht den gehörigen Grad der Convergenz haben werde, um als richtiger Ausdruck derselben gelten zu können. Zudem mag bei größeren Werthen des Winkels α als 45° aus gleicher Ursache auch der in der Gleichung (11)

enthaltene Factor $(1-\mathrm{tg}\,\alpha\frac{\partial v}{\partial u})^{\frac{i}{2}}$, doch nur wenn i nicht gleich 2 ist, dazu beitragen, die Convergenz der für $\frac{\partial v}{\partial u}$ und v sich ergebenden Reihen zu beeinträchtigen.

Die letzteren Reihen haben den Vorzug vor den $\frac{\partial z}{\partial x}$ und z in x (§2 u. 3), so wie vor den $\frac{\partial x}{\partial z}$ und x in z (§5 u. 6) ausdrückenden Reihen, daß sie zugleich für größere, im zweiten Octanten des Kreises liegende, und für kleinere Werthe des Winkels α anwendbar sind. Wenn jedoch der Winkel, den der der Berechnung zu unterwerfende Bogen der Flugbahn umspannt, d.i. der von den Normallinien an den beiden Gränzpunkten des Bogens eingeschlossene Winkel, welcher für die ganze, vom Anfangspunkte bis zu dem Endpunkte mit der verticalen berührenden gerechnete Bahn gleich $\alpha+90°$ ist, mehr als etwa den dritten Theil eines rechten Winkels beträgt, so wird die Berechnung auch vermittelst jener für $\frac{\partial v}{\partial u}$ und v dargestellten Reihen nicht anders als abschnittweise, indem nämlich der zu berechnende Bogen in Abschnitte, deren jeder etwa 30° umfaßt, getheilt, und die Endgeschwindigkeit des einen Abschnitts nach Größe und Richtung für die Anfangsgeschwindigkeit des nächstfolgenden Abschnitts genommen wird, sich bewerkstelligen lassen.

Aus diesen Betrachtungen wird aber klar, daß die auf die Flugbahn der Geschoße Bezug habenden Rechnungen, welchen Weg man dabei einschlagen mag, bei größeren Werthen des Winkels α immer beträchtlichere Schwierigkeiten mit sich führen müssen als bei kleineren; wozu noch weiter kommt, daß bei größerer Höhe über dem Horizonte des Geschützstandes, welche die Geschoße erreichen, auch die der zunehmenden Höhe entsprechende Abnahme der Luftdichtigkeit weniger unberücksichtigt bleiben kann.

§13.

Um die Auflösung der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g\sin\alpha - p\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -g\cos\alpha - p\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^{i-1}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

weiter zu vervollständigen, mögen die Coordinaten u und v hier noch als Zeitfunctionen, durch gleichzeitige Integration dieser Gleichungen, entwickelt werden, wodurch zugleich auch x und z (§ 9) als solche Functionen sich ergeben. Zu diesem Ende setze man

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T + V_1 \cdot g + V_2 \cdot g^2 + V_3 \cdot g^3 + \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_1 \cdot g + F_2 \cdot g^2 + F_3 \cdot g^3 + \ldots\ldots,$$

in welchen Reihen T den unter der Voraussetzung $g=0$ aus den Gleichungen (7) und (8) für $\frac{\partial u}{\partial t}$ oder $\frac{\partial v}{\partial t}$ sich ergebenden Ausdruck, der für $t=0$ auf f zurückgehen muss, und $V_1, V_2 \ldots F_1, F_2 \ldots$ ebenfalls Functionen von t, welche aber zugleich mit dieser Veränderlichen verschwinden, vorstellen. Bei dieser Annahme erhält man, indem man ganz nach der in den vorangehenden §§ 29 u. 30 enthaltenen Anleitung verfährt, aus den Gleichungen (7) und (8) folgende Theilgleichungen:

V)

1) $\frac{\partial T}{\partial t} = -p T^i;$

2) $\frac{\partial V_1}{\partial t} + p i T^{i-1} \cdot V_1 = -\sin\alpha;$

3) $\frac{\partial V_2}{\partial t} + p i T^{i-1} \cdot V_2 = -p(i-1) T^{i-2}\left(\tfrac{1}{2} i V_1^2 + \tfrac{1}{2} F_1^2\right);$

4) $\frac{\partial V_3}{\partial t} + p i T^{i-1} \cdot V_3 = -p(i-1)\left(T^{i-2}(i V_1 V_2 + F_1 F_2) + \frac{i-2}{2} T^{i-3}\left(\frac{i}{3} V_1^3 + V_1 F_1^2\right)\right);$

u. s. f.

F)

1) $\frac{\partial F_1}{\partial t} + p T^{i-1} \cdot F_1 = -\cos\alpha;$

2) $\frac{\partial F_2}{\partial t} + p T^{i-1} \cdot F_2 = -p(i-1) T^{i-2} V_1 F_1;$

3) $\frac{\partial F_3}{\partial t} + p T^{i-1} \cdot F_3 = -p(i-1)\left(T^{i-2}(V_1 F_2 + V_2 F_1) + \tfrac{1}{2} T^{i-3}\left((i-2) V_1^2 F_1 + F_1^3\right)\right);$

u. s. f.

§ 14.

Aus der Gleichung V) 1) findet sich, in Uebereinstimmung mit § 27 (Gl. I),

$$T = \frac{f}{\left(1+(i-1)f^{i-1}pt\right)^{\frac{1}{i-1}}},$$

oder, wenn der Kürze halber τ für $1+(i-1)f^{i-1}pt$ geschrieben wird, so dass

$$\partial\sigma = (i-1)\mu f^{i-1}\cdot\partial t, \qquad \partial t = \frac{1}{(i-1)\mu f^{i-1}}\cdot\partial\sigma$$

ist, $\qquad T = \dfrac{f}{\sigma^{\frac{1}{i-1}}}$,

woraus weiter $\int T\partial t = \dfrac{\sigma^{\frac{i-2}{i-1}}-1}{(i-2)\mu f^{i-2}}$ sich ergibt.

Aus V) 2) erhält man nach der bisher befolgten Methode

$$V_1 = C_1.\sigma^{-\frac{i}{i-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial C_1}{\partial t}.\sigma^{-\frac{i}{i-1}} = -\sin\alpha,$$

daher $\partial C_1 = -\dfrac{\sin\alpha}{(i-1)\mu f^{i-1}}\sigma^{\frac{i}{i-1}}\partial\sigma \quad$ und $C_1 = -\dfrac{\sin\alpha}{\mu f^{i-1}}\cdot\dfrac{1}{2i-1}\left(\sigma^{\frac{2i-1}{i-1}}-1\right)$,

oder $\qquad V_1 = -\dfrac{\sin\alpha}{\mu f^{i-1}}\cdot\dfrac{1}{2i-1}\left(\sigma-\sigma^{-\frac{i}{i-1}}\right)$,

und hieraus $\quad \int V_1\partial t = -\dfrac{\sin\alpha}{\mu^2 f^{2i-2}}\left(\dfrac{\sigma^2}{2(i-1)(2i-1)}+\dfrac{\sigma^{-\frac{1}{i-1}}}{2i-1}-\dfrac{1}{2(i-1)}\right)$.

Ebenso gibt die Gleichung F) 1)

$$F_1 = K_1.\sigma^{-\frac{1}{i-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial K_1}{\partial t}.\sigma^{-\frac{1}{i-1}} = -\cos\alpha,$$

daher $\partial K_1 = -\dfrac{\cos\alpha}{(i-1)\mu f^{i-1}}\sigma^{\frac{1}{i-1}}\partial\sigma \quad$ und $K_1 = -\dfrac{\cos\alpha}{i\mu f^{i-1}}\left(\sigma^{\frac{i}{i-1}}-1\right)$,

oder $\qquad F_1 = -\dfrac{\cos\alpha}{i\mu f^{i-1}}\left(\sigma-\sigma^{-\frac{1}{i-1}}\right)$,

und hieraus $\int F_1\partial t = -\dfrac{\cos\alpha}{\mu^2 f^{2i-2}}\left(\dfrac{\sigma^2}{2i(i-1)}-\dfrac{\sigma^{\frac{i-2}{i-1}}}{i(i-2)}+\dfrac{1}{2(i-1)(i-2)}\right)$.

Es findet sich dann ferner

aus V) 3)

$$\partial C_2 = -\frac{1}{2\mu^2 f^{2i-1}}\left[i\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(\sigma^{\frac{2i}{i-1}}-2\sigma^{\frac{1}{i-1}}+\sigma^{-2}\right)+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(\sigma^{\frac{2i}{i-1}}-2\sigma^{\frac{i}{i-1}}+1\right)\right]\partial\sigma,$$

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu^2 f^{2i-1}}\left[i\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(\frac{i-1}{3i-1}\sigma^{\frac{3i-1}{i-1}}-2\frac{i-1}{i}\sigma^{\frac{i}{i-1}}-\sigma^{-1}+2\frac{(2i-1)^2}{i(3i-1)}\right)+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(\frac{i-1}{3i-1}\sigma^{\frac{3i-1}{i-1}}-\frac{2(i-1)}{2i-1}\sigma^{\frac{2i-1}{i-1}}+\sigma-\frac{2i^2}{(2i-1)(3i-1)}\right)\right],$$

$$V_2 = -\frac{1}{\mu^2 f^{2i-1}}\left[\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(\frac{i(i-1)}{2(3i-1)}\sigma^{\frac{2i-1}{i-1}}-(i-1)+\frac{(2i-1)^2}{3i-1}\sigma^{-\frac{i}{i-1}}-\frac{i}{2}\sigma^{-\frac{2i-1}{i-1}}\right)+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(\frac{i-1}{2(3i-1)}\sigma^{\frac{2i-1}{i-1}}-\frac{i-1}{2i-1}\sigma+\frac{1}{2}\sigma^{-\frac{1}{i-1}}-\frac{i^2\sigma^{-\frac{i}{i-1}}}{(2i-1)(3i-1)}\right)\right],$$

$$\int V_2\partial t = -\frac{1}{\mu^3 f^{3i-2}}\left[\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(\frac{i(i-1)}{2(3i-1)(3i-2)}\sigma^{\frac{3i-2}{i-1}}-\sigma-\frac{(2i-1)^2}{3i-1}\sigma^{-\frac{1}{i-1}}+\frac{1}{2}\sigma^{-\frac{i}{i-1}}+\frac{(2i-1)^2}{3i-2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(\frac{i-1}{2(3i-1)(3i-2)}\sigma^{\frac{3i-2}{i-1}}-\frac{\sigma^2}{2(2i-1)}+\frac{1}{2(i-2)}\sigma^{\frac{i-2}{i-1}}+\frac{i^2}{(2i-1)(3i-1)}\sigma^{-\frac{1}{i-1}}-\frac{i^2}{2(i-2)(3i-2)}\right)\right];$$

aus F) 2)

$$\partial K_2 = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{i(2i-1)\mu^2 f^{2i-1}}\left(\sigma^{\frac{i+1}{i-1}}-\sigma^{\frac{1}{i-1}}-\sigma^{-\frac{i-2}{i-1}}+\sigma^{-2}\right)\partial\sigma,$$

$$K_2 = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{i(2i-1)\mu^2 f^{2i-1}}\left(\frac{i-1}{2i}\sigma^{\frac{2i}{i-1}}-\frac{i-1}{i}\sigma^{\frac{i}{i-1}}-(i-1)\sigma^{\frac{1}{i-1}}-\sigma^{-1}+\frac{(i+1)(2i-1)}{2i}\right),$$

$$F_2 = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\mu^2 f^{2i-1}}\left(\frac{i-1}{2i^2(2i-1)}\sigma^{\frac{2i-1}{i-1}}-\frac{i-1}{i^2(2i-1)}\sigma-\frac{i-1}{i(2i-1)}-\frac{\sigma^{-\frac{i}{i-1}}}{i(2i-1)}+\frac{i+1}{2i^2}\sigma^{-\frac{1}{i-1}}\right),$$

$$\int F_2\,\partial t = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\mu^3 f^{3i-2}}\left(\frac{i-1}{2i^2(2i-1)(3i-2)}\tau^{\frac{3i-2}{i-1}} - \frac{\tau^2}{2i^2(2i-1)} - \frac{\tau}{i(2i-1)} + \frac{\tau^{-\frac{1}{i-1}}}{i(2i-1)} + \frac{i+1}{2i^2(i-2)}\tau^{\frac{i-2}{i-1}} - \frac{3}{2(i-2)(3i-2)}\right);$$

aus P, 4)

$$P_3 = -\frac{\sin\alpha}{\mu^3 f^{3i-1}}\Bigg[\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(\frac{i(i-1)}{3(3i-1)(4i-1)}\tau^{\frac{3i-1}{i-1}} - \frac{i(i-1)}{2(3i-1)}\tau^{\frac{i}{i-1}} - \frac{(2i-1)^2}{4i-1}\tau^{-\frac{i}{i-1}} - \frac{i}{6}\tau^{-\frac{3i-2}{i-1}} + \frac{i(2i-1)}{3i-1}\tau^{-\frac{2i-1}{i-1}} + \frac{(i-1)(2i-1)}{3i-1}\right)$$
$$+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(-\frac{(i-1)(i^2-4i+1)}{2i(3i-1)(4i-1)}\tau^{\frac{3i-1}{i-1}} + \frac{(i-1)(2i^3-14i^2+13i-3)}{2i(2i-1)^2(3i-1)}\tau^{\frac{2i-1}{i-1}} - \frac{i-1}{2(3i-1)}\tau^{\frac{i}{i-1}} + \frac{(i-1)(i+3)}{2i(2i-1)}\tau - \frac{i+1}{2i}\tau^{-\frac{1}{i-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{14i^3+10i^2-7i+1}{2(2i-1)(3i-1)(4i-1)}\tau^{-\frac{i}{i-1}} - \frac{i^3}{(2i-1)^2(3i-1)}\tau^{-\frac{2i-1}{i-1}} + \frac{(i-1)(2i^2-4i+1)}{(2i-1)^2(3i-1)}\right)\Bigg],$$

$$\int P_3\,\partial t = -\frac{\sin\alpha}{\mu^4 f^{4i-2}}\Bigg[\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(\frac{i(i-1)\tau^{\frac{4i-2}{i-1}}}{6(2i-1)(3i-1)(4i-1)} - \frac{i(i-1)\tau^{\frac{2i-1}{i-1}}}{2(2i-1)(3i-1)} + \frac{2i-1}{3i-1}\tau + \frac{(2i-1)^2}{4i-1}\tau^{-\frac{1}{i-1}} - \frac{2i-1}{3i-1}\tau^{-\frac{i}{i-1}} + \frac{i\tau^{-\frac{2i-1}{i-1}}}{6(2i-1)} - \frac{4i^2-5i+2}{2(2i-1)}\right)$$
$$+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(-\frac{(i-1)(i^2-4i+1)}{4i(2i-1)(3i-1)(4i-1)}\tau^{\frac{4i-2}{i-1}} + \frac{(i-1)(2i^3-14i^2+13i-3)}{2i(2i-1)^2(3i-1)(3i-2)}\tau^{\frac{3i-2}{i-1}} - \frac{(i-1)\tau^{\frac{2i-1}{i-1}}}{2(2i-1)(3i-1)} + \frac{(i+3)\tau^2}{4i(2i-1)} + \frac{2i^2-4i+1}{(2i-1)^2(3i-1)}\tau\right.$$
$$\left.-\frac{14i^3+10i^2-7i+1}{2(2i-1)(3i-1)(4i-1)}\tau^{-\frac{1}{i-1}} + \frac{i^2}{(2i-1)^2(3i-1)}\tau^{-\frac{i}{i-1}} - \frac{i+1}{2i(i-2)}\tau^{\frac{i-2}{i-1}} + \frac{i^2(7i-5)}{4(i-2)(2i-1)(3i-2)}\right)\Bigg];$$

aus F, 3)

$$F_3 = -\frac{\cos\alpha}{\mu^3 f^{3i-1}}\Bigg[\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(-\frac{(i-1)(2i-1)(i^2-4i+1)}{6i^3(3i-1)}\tau^{\frac{3i-1}{i-1}} + \frac{(i-1)(i^3-6i^2+5i-1)}{2i^3(3i-1)}\tau^{\frac{2i-1}{i-1}} - \frac{(i-1)(2i-1)}{2i^2}\tau^{\frac{i}{i-1}} + \frac{(i-1)(i+1)(2i-1)}{2i^3}\tau\right.$$
$$\left.-\frac{(2i-1)^2(2i^2+3i+1)}{6i^3}\tau^{-\frac{1}{i-1}} + \frac{(2i-1)(7i^2-1)}{2i^2(3i-1)}\tau^{-\frac{i}{i-1}} - \frac{1}{2}\tau^{-\frac{2i-1}{i-1}} + \frac{(i-1)(4i^3-i^2-3i+1)}{i^2(3i-1)}\right)$$
$$+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(-\frac{(i-1)\tau^{\frac{3i-1}{i-1}}}{3i(3i-1)} + \frac{(i-1)(5i-2)}{2i(2i-1)(3i-1)}\tau^{\frac{2i-1}{i-1}} - \frac{i-1}{i(2i-1)}\tau + \frac{i+2}{6i}\tau^{-\frac{1}{i-1}} - \frac{i\tau^{-\frac{i}{i-1}}}{(2i-1)(3i-1)} - \frac{i(i-1)}{(2i-1)(3i-1)}\right)\Bigg],$$

$$\int F_3\,\partial t = -\frac{\cos\alpha}{\mu^4 f^{4i-2}}\Bigg[\left(\frac{\sin\alpha}{2i-1}\right)^2\left(-\frac{(i-1)(i^2-4i+1)}{12i^3(3i-1)}\tau^{\frac{4i-2}{i-1}} + \frac{(i-1)(i^3-6i^2+5i-1)}{2i^3(3i-1)(3i-2)}\tau^{\frac{3i-2}{i-1}} - \frac{i-1}{2i^2}\tau^{\frac{2i-1}{i-1}} + \frac{(i+1)(2i-1)}{4i^3}\tau^2 + \frac{4i^3-i^2-3i+1}{i^2(3i-1)}\tau\right.$$
$$\left.-\frac{(2i-1)(7i^2-1)}{2i^2(3i-1)}\tau^{-\frac{1}{i-1}} + \frac{1}{2i}\tau^{-\frac{i}{i-1}} - \frac{(2i-1)^2(2i^2+3i+1)}{6i^3(i-2)}\tau^{\frac{i-2}{i-1}} + \frac{28i^3-47i^2+31i-8}{4i(i-2)(3i-2)}\right)$$
$$+\left(\frac{\cos\alpha}{i}\right)^2\left(-\frac{(i-1)\tau^{\frac{4i-2}{i-1}}}{6i(2i-1)(3i-1)} + \frac{(i-1)(5i-2)\tau^{\frac{3i-2}{i-1}}}{2i(2i-1)(3i-1)(3i-2)} - \frac{\tau^2}{2i(2i-1)} - \frac{i\tau}{(2i-1)(3i-1)} + \frac{i\tau^{-\frac{1}{i-1}}}{(2i-1)(3i-1)} + \frac{i+2}{6i(i-2)}\tau^{\frac{i-2}{i-1}} - \frac{i^2}{(i-2)(2i-1)(3i-2)}\right)\Bigg];$$

u. s. w.

Für $i=2$ ist der Ausdruck $\frac{\tau^{\frac{i-2}{i-1}}-1}{i-2} = \log(1+\mu f t)$ (§34), und einer besondern Entwicklung für diesen Werth von i bedarf es hier nicht, weil da, wo $i-2$ im Exponenten von τ vorkommt, der letztere Ausdruck sich von den übrigen Gliedern absondern läßt, und dadurch auch der Factor $i-2$ in den Nennern dieser Glieder sich ausscheidet.

Nachdem die Form der Coefficienten $P_1, P_2 \ldots F_1, F_2 \ldots$ bekannt ist, hat man nach §30 auch für den der Zeit t entsprechenden Augenblick der Bewegung

$$\frac{ds}{dt} = \mathfrak{T} + \mathfrak{V}_1 \cdot g + \left(\mathfrak{V}_2 + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{F}_1^2}{\mathfrak{T}}\right) g^2 + \left(\mathfrak{V}_3 + \frac{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2}{\mathfrak{T}} - \frac{1}{2}\mathfrak{V}_1\left(\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{T}}\right)^2\right) g^3 \cdots,$$

woraus ferner die Länge des Bogens s gleichfalls als Zeitfunction sich bestimmen läßt.

Wird der Winkel α gleich 90° oder gleich −90° angenommen, so verschwinden die Coefficienten $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ …, und die für $\frac{du}{dt}$ und u entwickelten Ausdrücke müssen, wenn man zugleich i = 2 nimt, mit den bekannten Gleichungen für die geradlinige Bewegung eines in senkrechter Richtung in der Luft steigenden oder fallenden Körpers zusammentreffen.

In bezug auf die Convergenz der für $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ etc. sich ergebenden Reihen finden die im §12 dieses Anhanges über die Convergenz der Reihen für $\frac{dv}{du}$ und u, so weit diese von der Entwickelung des Factors $\left(\frac{ds}{du}\right)^{i-1}$ abhängt, gemachten Bemerkungen Anwendung.

″ ″

″

Es mag genügen, in diesem Anhange gezeigt zu haben, daß auch bei allgemeinerer Bedeutung des Widerstands-Exponenten i, sowie unter der Voraussetzung eines dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes, die Differential-Gleichungen der Flugbahn eines nicht rotirenden Geschosses mit sphärischer Oberfläche annäherungsweise sich integriren und auflösen lassen. Da die Naturwissenschaften über die Gesetze des Luftwiderstandes bis jetzt noch keine befriedigende Aufklärung zu geben vermögen, und die oben genannte Voraussetzung den Folgerungen, welche aus den Beobachtungen über die Bewegung der Körper in flüssigen Mitteln zu entnehmen sind, nur sehr unvollkommen entspricht, so möchte es sich wohl der Mühe lohnen zu versuchen, ob nicht durch Annahme geeigneter Werthe für den Exponenten i und für die Größe n, deren Abhängigkeit von diesem

Exponenten nach 328 wenigstens ungefähr sich beurtheilen läßt, die Ergebnisse der Rechnung mit denen der Erfahrung in größere Uebereinstimmung gebracht werden können (*). In eine nähere Erörterung des Gebrauches, welcher hiebei von den dargestellten Formeln gemacht werden könnte, oder auch in weitere Einzelnheiten über die Art und Weise, wie dieselben, für sich allein oder in Verbindung mit anderen bekannten Relationen, zur Ermittelung der Anfangsgeschwindigkeit F oder des Erhöhungswinkels α, wenn diese unbekannt sind, aus gegebenen Werthen der Coordinaten z und x oder anderer Bestimmungsstücke, angewendet werden könnten, hier einzugehen, liegt jedoch außer dem Plane der gegenwärtigen Abhandlung, und würde nicht weniger zu einer Überschreitung der dem Umfange derselben gesetzten Gränzen führen.

(*) Hutton in Nouvelles expériences, Tome II, 1826. p. 143 (franz. Übers.) sagt: „Il paroit qu'il „n'y a aucune puissance entière de la vitesse, ou qu'il n'y a aucune expression de la „vitesse composée d'un seul terme, qui puisse être proportionelle aux résistances, „quelles qu'elles soient. Il est vrai que le monome $\frac{v^{2,1}}{5700}$ reproduit assez exactement „toutes les résistances. Mais cette formule, quoiqu'elle puisse très bien servir pour „quelques cas particuliers, & même pour la construction d'une série complète ou d'une „table de résistances, n'est pas propre à l'usage dans les problèmes où il entreroit „des expressions différentielles ou des integrales, à cause du nombre fractionnaire 2,1, „exposant de la vitesse v." — Ob nun gleich der zweite der hier angeführten Fälle, daß sich das Widerstandsgesetz durch keine eingliedrige Potenz-Function der Geschwindigkeit ausdrücken läßt, der überwiegend wahrscheinlichere ist, so wie auch Hutton in einer der folgenden Nummern desselben Bandes p. 175 weiter dahin sich ausspricht, „qu'il „n'y a aucune puissance monome de la vitesse, qui puisse exprimer la résistance de „l'air, mais que deux puissances différentes au moins sont absolument nécessaires „pour cet objet, ... so möchte dennoch die Wichtigkeit des Gegenstandes es verdienen, daß der hier angedeutete Versuch unternommen würde.

Inhalts-Übersicht.

Seite

Einleitung 1

Erstes Kapitel.

Untersuchungen über die Gesetze der Bewegung rotirender exzentrischer Geschosse mit sphärischer Oberfläche, ohne Rücksicht auf die Luftreibung.

§ 1. Allgemeiner Ausdruck für den Widerstand einer Flüssigkeit gegen eine in ihr sich bewegende ebene Fläche 14

2–4. Berechnung des Widerstandes gegen den Umfang eines Kreises, der nach einer in seine Ebene fallenden Richtung sich bewegt, u. zugleich um eine auf dieser Ebene senkrechte Achse sich dreht . . 15

5, 6. Darstellung der Differentialgleichungen der doppelten Bewegung eines um seinen Schwerpunkt rotirenden Geschosses von beliebiger Gestalt 20

7–10. Übergang zu dem Falle eines exzentrischen Geschosses von äußerer Kugelgestalt. Ausdruck für die normale Geschwindigkeit irgend eines Punktes der Kugeloberfläche, und geeignete Umwandlungen derselben. Beziehung dieser Geschwindigkeit zur Totalgeschwindigkeit des Mittelpunkts 25

11, 12. Ausführung der Integration der in den Gleichungen vorkommenden, den Gesamtwiderstand gegen das Geschoß vorstellenden Ausdrücke 32

13. Zurückführung der Unbekannten auf eine der der Gleichungen entsprechende Anzahl 35

14. Die Winkelgeschwindigkeiten der Umdrehung um irgend einen als Umdrehungspunkt gedachten Punkt des Geschosses

Seite

sind stets dieselben, wie die Winkelgeschwindigkeiten der Umdrehung um den Schwerpunkt 38

§ 15, 16. Einführung der Coordinaten der Bahn des Mittelpunkts statt jener der Bahn des Schwerpunkts in die Gleichungen, welche sich in dieser Form auf einfacherem Wege construiren lassen . 40

17, 18. Ganz zu denselben Gleichungen der doppelten Bewegung gelangt man, wenn man von vorn herein die Voraussetzung, das Geschoß rotire um den Mittelpunkt, zum Grunde legt . 45

19–22. Allgemeine Folgerungen aus den bisherigen Ergebnissen der Untersuchungen 49

23–26. Zum Behuf der Integration der Gleichungen werden mehrere deren Allgemeinheit beschränkende Voraussetzungen gemacht, insbesondere die Schwere des Geschosses außer Acht gelassen . 55

27, 28. Erste Folgerungen aus den so vereinfachten Gleichungen, wenn ferner die Excentricität gleich Null gesetzt wird . . 67

29–33. Integration der zwei Gleichungen der fortschreitenden Bewegung für sich in Reihenform, wobei der Widerstands-Exponent i als eindeutig und übrigens jeden reellen Werth vorstellend genommen ist 71

34. Einzelne bestimmte Werthe des als eindeutig gedachten Exponenten i machen besondere Entwickelungen nothwendig . . 79

35–38. Integration derselben Gleichungen in der Voraussetzung, daß der Exponent i als mehrdeutig zugleich die drei Werthe 2, 1 und 0 hat 82

39, 40. Die bisherigen Auflösungen begreifen alle die Fälle in

Seite

sich, in welchem die Rotations-Achse beim Anfange der Erregung sowohl auf der Richtung der Bewegung des Mittelpunkts, als auf dem durch den Schwerpunkt gehenden Durchmesser (der Centrallinie) senkrecht steht. Rotationsebene, vorwärtiger, rückwärtiger Theil derselben . . . 87

§ 41–43. Indem für die Zeichen der bekannten Größen beispielsweise numerische Werthe angegeben werden, wird die Convergenz der gefundenen Reihen beurtheilt, und ergibt sich die Unerheblichkeit der durch die Umdrehung entstehenden Veränderungen in der Bahn des Geschosses 91

44–48. Gleichzeitige Integration der drei Gleichungen der fortschreitenden und der umdrehenden Bewegung, unter der Voraussetzung eines dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes 100

49. Jede der aus der letzten Integration hervorgehenden Reihen besteht aus zwei Haupttheilen, wovon der eine auf den beständigen Theil (Anfangswerth), der andere auf den veränderlichen Theil der Umdrehungsgeschwindigkeit sich bezieht . 113

50. Untersuchungen über die Convergenz und Brauchbarkeit dieser Reihen. Abnahme der Winkelgeschwindigkeit und Verminderung der Zahl der Umläufe in der ersten Sekunde . 114

51. Größter und kleinster Werth der Umdrehungsgeschwindigkeit während jedes Umlaufs 119

52. Einführung der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts statt jener des Mittelpunkts in die entwickelten Reihen . . 121

53. Durch die Elemente der Mittelpunktsbahn sind zugleich

jene der Schwerpunktsbahn gegeben 122

§ 54. Berechnung und bildliche Darstellung des Theils beider Bahnen, der während des ersten Umlaufes beschrieben wird . . . 124

55. Einige bemerkenswerthe Eigenschaften der beiden Curven, welche diese Bahnen bilden 125

56, 57. Erläuterungen in Betreff der Mängel, denen die Rechnung bei verhältnißmäßig kleinen Anfangs-Werthen der Umdrehungsgeschwindigkeit unterliegt. Partielle Umläufe oder pendelartige Schwingungen der Geschoße. Sie sind ein Kennzeichen vorhandener Excentricität 129

Zweites Kapitel.

Untersuchungen über die Gesetze der Bewegung rotirender sphärischer Geschoße mit Rücksicht auf die Luftreibung.

58. Berührender Widerstand einer Flüssigkeit gegen eine in ihr sich bewegende Fläche, im Gegensatze gegen den normalen. Allgemeiner Ausdruck für jenen Widerstand . . . 136

59. Darstellung der Differential-Gleichungen der doppelten Bewegung eines um seinen Schwerpunkt rotirenden Geschoßes von beliebiger Gestalt 139

60. Uebergang zu dem Falle eines kugelförmigen Geschoßes, dessen Masse um den Mittelpunkt symmetrisch vertheilt und dessen Oberfläche durchaus von gleicher Beschaffenheit ist . . . 140

61, 62. Die in den Gleichungen vorkommenden, auf den Gesammt-Widerstand gegen die Oberfläche bezug habenden Ausdrücke mit angedeuteter Integration werden integrirt dargestellt, und die den normalen Widerstand, welcher hier

Seite

dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional angenommen wird, vorstellenden Glieder in den Gleichungen beigefügt . 144

§ 63. Vermöge der drei Gleichungen der umdrehenden Bewegung, welche integrirbar sind, findet die Umdrehung beständig um denselben Durchmesser, welcher im Raume sich stets parallel bleibt, statt 150

64–66. Bleibt die Schwere des Geschosses, welche ohne allen Einfluß auf die Umdrehung selbst ist, unbeachtet, so lassen sich auch die drei Gleichungen der fortschreitenden Bewegung in geschlossener Form integriren, und sind die Geschwindigkeit des Mittelpunkts und die Bogenlänge seiner Bahn von der Rotation gänzlich unabhängig. Die Abweichung des Geschosses, welche nur ganz unerheblich seyn kann, erfolgt immer gegen den vorwärtigen Theil der Rotations-Ebene. 153

Drittes Kapitel.

Weitere Folgerungen in Betreff des Einflusses der Rotation auf die Bahn sphärischer Geschosse.

67. Wird von der Schwere abgesehen, so umfassen die Auflösungen der Gleichungen des § 26 zugleich alle Fälle der allgemeineren Gleichungen des § 23. 161

68. Die geringe Erheblichkeit des Einflusses des normalen Widerstandes gegen die Umdrehung auf die Bahn eines excentrischen Geschosses, wie sie die Rechnung zeigt, muß darauf beruhen, daß die Wirkungen dieses Widerstandes während jedes Umlaufes sich selbst nahezu gänzlich aufheben, und dieselbe wechselseitige Vernichtung dieser Wir-

tungen durch sich selbst findet immer Statt, wie auch der Ausdruck des Widerstandes als Function der Geschwindigkeit beschaffen seyn mag 162

§ 69. Auch die Schwerkraft kann, wenn sie in der Rechnung berücksichtigt wird, in den diesen Einfluß betreffenden Ergebnissen keine wesentliche Änderung herbeiführen . . . 164

70. Selbst eine in der ganzen Allgemeinheit der Gleichungen des § 15 durchgeführte Rechnung könnte, wenn sie möglich wäre, ebensowenig ein verschiedenes Resultat liefern . . 166

71, 72. Indessen ist nach den Erfahrungen mehrerer Artillerien eine sehr bedeutende Einwirkung der Rotation auf die Bahn exzentrischer Geschoße eine unbestreitbare Thatsache. Versuche der württembergischen Artillerie mit exzentrischen zehnpfündigen Granaten 167

73–76. Versuche mit concentrisch construirten siebenpfündigen Granaten bei dieser Artillerie unternommen, um zu ermitteln, ob die beobachteten Erscheinungen in der Umdrehung für sich allein ihren Entstehungsgrund haben, oder ob die Rotation nur in Gemeinschaft mit der Excentricität sie hervorzubringen vermöge 171

77–82. Untersuchungen über die Frage, ob nicht in Unebenheiten der Oberfläche rotirender Artillerie-Geschoße eine Ursache zu fortdauernd in derselben Richtung wachsenden Abweichungen der Geschoße gefunden werden können . 180

83, 84. Erörterungen über diejenige Erklärungsart der im Gefolge der Rotation sich zeigenden Erscheinungen, welche deren Ursache in ungleicher Dichtigkeit der das Geschoß umgebenden Luftschichten findet 192

85, 86. Überblick über das Gesammtergebniß der angestellten Forschungen . . 197

Seite

Anhang I.

Einrichtung und Gebrauch der Excentricitätswage. 202

Anhang II.

Die Auflösung des ballistischen Problems ohne Rücksicht auf Rotation betreffend.

§ 1. Entwicklung der Differentialgleichungen der Flugbahn, in welcher die Horizontale durch den Anfangspunkt der Bahn zur Achse der unabhängig veränderlichen Coordinate genommen ist. 205

2, 3. Integration dieser Gleichungen in Reihenform sowohl bei unbestimmt bleibendem Werthe des (als eindeutig gedachten) Widerstands-Exponenten i, als für i = 2. 207

4. Entwicklung der Differentialgleichungen der Flugbahn, in welcher die Vertikale durch den Anfangspunkt der Bahn zur Achse der unabhängig veränderlichen Coordinate genommen ist. 212

5 – 7. Integration dieser Gleichungen in Reihenform sowohl bei unbestimmt bleibendem Werthe des Exponenten i, als für i = 2 . 213

8. Bei der Integration in Reihen können diese jedenfalls nur von beschränkter Brauchbarkeit seyn, oder deren Convergenz sich nur auf einen, grösseren oder kleineren, Theil der Bahn erstrecken. 218

9. Entwicklung der Differentialgleichungen der Flugbahn in welcher die Anfangsrichtung des Geschosses zur Achse der unabhängig veränderlichen Coordinaten genommen ist. 220

10, 11. Integration dieser Gleichungen in Reihenform sowohl bei unbestimmt bleibendem Werthe des Exponenten

Seite

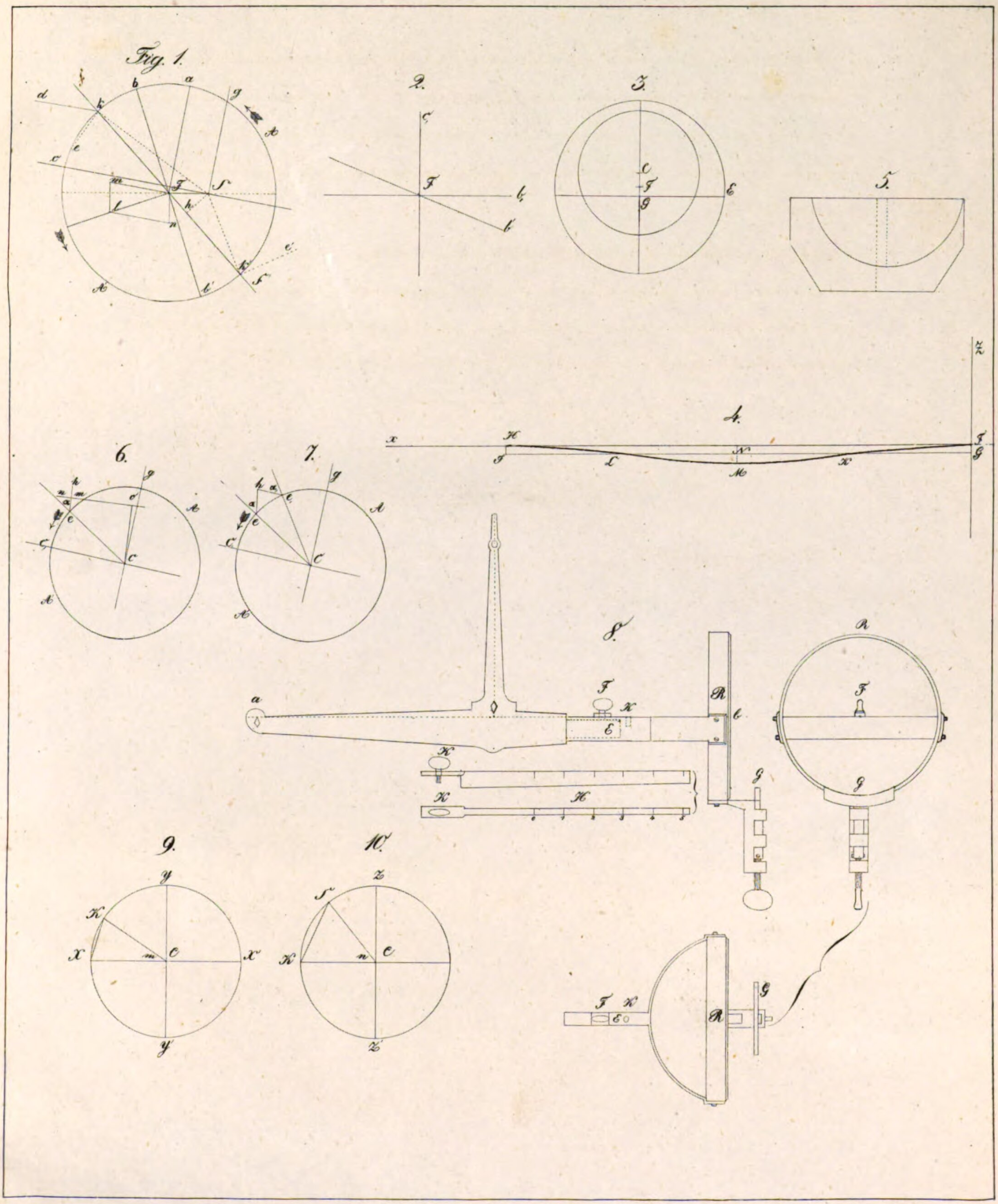
i, als für $i = 2$. 222

§ 12. Entwickelung der Differentialgleichungen der Flugbahn, in welchen die Anfangsrichtung des Geschosses zur Achse der abhängig veränderlichen Coordinaten genommen ist. Betrachtungen über die Convergenz der entwickelten Reihen . 226

13, 14. Entwickelung der Coordinaten der Flugbahn als Zeitfunctionen durch gleichzeitige Integration der Differentialgleichungen der Bahn, in welchen die Zeit zur unabhängigen Veränderlichen genommen ist 229

Berichtigungen:

S. 42	Z. 14 v. o.	statt	$\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}$	zu lesen	$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}$
„ 52	„ 12 v. o.	„	$\frac{\partial q}{\partial r}$	„ „	$\frac{\partial q}{\partial t}$
„ „	„ 13 v. o.	„	$\frac{\partial c}{\partial t}$	„ „	$\frac{\partial r}{\partial t}$
„ 70	„ 12 v. o.	„	$q + 2k$	„ „	$q^2 + 2k$
„ 74	„ 2 v. o.	„	$\varepsilon^2 \ldots\ldots (d)$	„ „	$\varepsilon^3 \ldots\ldots (d)$
„ 94	„ 4 v. u.	„	$\int \frac{\cos\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2}, \partial t$	„ „	$\int \frac{\cos\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2} \partial t,$
„ 122	„ 3 v. o.	„	$-\left(\frac{pf^0}{h}\right)^2$	„ „	$-\frac{(pf^0)^2}{h}$
„ 144	„ 5 v. u.	„	$\frac{R^2 - (\rho^2 - 1)}{2(\rho^2 - 1)t^2}$	„ „	$\frac{R^2 - (\rho^2 - 1)}{2(\rho^2 - 1)l^2}$
„ 147	„ 1 v. o.	„	$4\pi l^2$	„ „	$4\pi l^4$
„ 108	„ 7 v. u.	„	$\frac{26}{47}$	„ „	$\frac{26}{27}$


Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Förster Buchb.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Heim, J. P. G. <<von>>,

Beiträge zur Ballistik, in besonderer Beziehung auf die Umdrehung der Artillerie-Geschoße

Ulm 1848

4 App.mil. 43
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10220904-3